TRƯỜNG ĐẠI HỌC PHẠM VĂN ĐỒNG
KHOA SƯ PHẠM TỰ NHIÊN

BÀI GIẢNG

CÁC TẬP HỢP SỐ

QUẢNG NGÃI – 2014

TRƯỜNG ĐẠI HỌC PHẠM VĂN ĐỒNG
KHOA SƯ PHẠM TỰ NHIÊN

BÀI GIẢNG

CÁC TẬP HỢP SỐ

Người soạn: Lê Văn Thuận

QUẢNG NGÃI – 2014

LỜI NÓI ĐẦU

Hiện nay có nhiều giáo trình, tài liệu tham khảo viết về lí thuyết các tập hợp số. Tuy nhiên, chưa có giáo trình chính thức viết về các tập hợp số dành cho sinh viên ngành giáo dục tiểu học; hơn nữa với phương thức đào tạo theo hệ thống tín chỉ hiện nay có những đặc thù riêng, đòi hỏi thời gian sinh viên tự học và nghiên cứu nhiều hơn.

Chúng tôi biên soạn bài giảng "**các tập hợp số**" trên cơ sở đề cương chi tiết, tham khảo các tài liệu và sắp xếp một cách có hệ thống, nhằm giúp người học có thể dễ dàng tự học và nghiên cứu. Đây là một học phần trong chương trình đào tạo giáo viên tiểu học có trình độ cao đẳng.

Bài giảng này có thời lượng 30 tiết trên lớp, 2 tín chỉ và nội dung gồm 3 chương:

Chương 1: *Cấu trúc đại số*.

Chương 2: *Số tự nhiên*.

Chương 3: *Tập số hữu tỉ và tập số thực*.

Vì thời lượng chỉ gồm 2 tín chỉ nên bài giảng không thể khai thác sâu hết được một số kiến thức, người học có thể tham khảo thêm học phần này trong [1] , [2], [3] và [4].

Lần đầu tiên bài giảng được biên soạn với phương thức đào tạo theo hệ thống tín chỉ; chắc chắn không tránh khỏi những thiếu sót nhất định. Chúng tôi rất mong nhận được ý kiến đóng góp của bạn đọc.

Chúng tôi xin chân thành cảm ơn.

Tháng 5 năm 2014

Lê Văn Thuận

Chương 1

CẤU TRÚC ĐẠI SỐ

MỤC TIÊU

Kiến thức:

- Giúp sinh viên nắm vững cấu trúc cơ bản về: nửa nhóm, nhóm, vành và trường.
- Hình thành cho sinh viên những ý tưởng để tiếp cận với toán học hiện đại và nhận thức sâu sắc về cấu trúc đại số của các tập hợp số ở bậc Tiểu học.

Kĩ năng:

- Kiểm tra một "phép toán" hai ngôi trên một tập hợp.
- Kiểm tra một tập hợp với các phép toán là: nửa nhóm, nhóm, con nhóm, vành và trường.

Thái độ:

- Sinh viên nắm vững các khái niệm cơ bản về cấu trúc đại số của các tập hợp.
- Sinh viên có liên hệ thực tế với chương trình môn toán bậc Tiểu học.

1.1. PHÉP TOÁN HAI NGÔI

1.1.1. Khái niệm

Cho X là một tập khác rỗng. Một phép toán hai ngôi trên tập X là một ánh xạ

$$T : X \times X \to X$$
$$(a;b) \mapsto aTb.$$

Phần tử $aTb \in X$ được gọi là *cái hợp thành* hay còn được gọi là *kết quả* của phép toán T thực hiện trên hai phần tử a và b.

Như vậy một phép toán hai ngôi T trên tập X là một quy tắc đặt tương ứng mỗi cặp phần tử (a; b) thuộc $X \times X$ một phần tử xác định duy nhất aTb thuộc X.

Ví dụ 1.1:

1) Phép cộng thông thường các số là phép toán hai ngôi trên các tập: $\mathbb{N}$ các số tự nhiên, tập $\mathbb{Z}$ các số nguyên, tập $\mathbb{Q}$ các số hữu tỉ và tập $\mathbb{R}$ các số thực.

2) Phép nhân thông thường các số là phép toán hai ngôi trên tập $\mathbb{N}$ các số tự nhiên…

3) Cho tập $\mathbb{N}^*$ các số tự nhiên khác 0. Ánh xạ:

$$*: \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$$

$$(a;b) \mapsto a*b = a^b$$

là một phép toán hai ngôi trên tập các số tự nhiên khác 0, *còn được gọi là phép nâng lên lũy thừa*.

4) Cho tập $\mathbb{Z}$ các số nguyên, phép trừ là một phép toán hai ngôi trên $\mathbb{Z}$, vì quy tắc sau là một ánh xạ: $-: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$$(a;b) \mapsto a-b.$$

Tuy nhiên, phép trừ không phải là phép toán hai ngôi trên tập hợp các số tự nhiên $\mathbb{N}$. Vì ta có 2 và 4 thuộc $\mathbb{N}$ nhưng $2-4 \notin \mathbb{N}$.

5) Cho X là một tập hợp bất kì và P(X) là tập các tập con của X. Các phép toán: hợp, giao và hiệu của hai tập hợp đều là những phép toán hai ngôi trên tập P(X). Tức ta có các ánh xạ sau:

Phép toán hợp: $\cup: P(X) \times P(X) \to P(X)$

$$(A;B) \quad \mapsto \quad A \cup B$$

Phép toán giao: $\cap: P(X) \times P(X) \to P(X)$

$$(A;B) \quad \mapsto \quad A \cap B$$

Phép toán hiệu: $\setminus: P(X) \times P(X) \to P(X)$

$$(A;B) \quad \mapsto \quad A \setminus B$$

6) Cho tập hợp X và Hom(X, X) là tập hợp các ánh xạ từ X vào chính nó. Phép lấy hợp thành hai ánh xạ là một phép toán hai ngôi trên tập Hom(X, X).

Thật vậy, vì với hai ánh xạ f và g bất kì từ X đến X. Nên ta có ánh xạ:

$$Hom(X,X) \times Hom(X,X) \to Hom(X,X)$$

$$(f;g) \qquad \mapsto \qquad fg$$

7) Cho tập $X = \{0,1,2\}$, ta có phép toán hai ngôi xác định trên X như sau:

$$T: X \times X \to X$$

$$(a;b) \mapsto r$$

trong đó r là dư của phép chia a + b cho 3.

Có thể mô tả phép toán T trong bảng sau:

T	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

1.1.2. Các tính chất của phép toán hai ngôi

Định nghĩa 1.1. Cho T là một phép toán hai ngôi trên tập X. Ta nói rằng phép toán T có tính chất giao hoán nếu và chỉ nếu với mọi a, b thuộc X thì aTb = bTa.

- Ta dễ nhận thấy các phép toán hai ngôi trong các ví dụ 1), 2), 5), 7) trong Ví dụ 1.1. là những phép toán có tính chất giao hoán.

- Các phép toán hai ngôi trong các ví dụ 3), 4) không có tính chất giao hoán, ví dụ 6) không có tính chất giao hoán nếu tập X có nhiều hơn một phần tử.

Định nghĩa 1.2. Cho T là một phép toán hai ngôi trên tập X. Ta nói rằng phép toán T có tính chất kết hợp nếu và chỉ nếu với mọi a, b, c thuộc X thì (aTb)Tc = aT(bTc).

Ta dễ nhận thấy các phép toán hai ngôi trong các ví dụ 1), 2), 5), 6), 7) trong ví dụ 1.1. là những phép toán có tính chất kết hợp.

Các phép toán hai ngôi trong các ví dụ 3), 4) trong ví dụ 1.1. là những phép toán có tính chất kết hợp.

1.1.3. Những phần tử đặc biệt

Định nghĩa 1.3. Cho T là một phép toán hai ngôi trên tập X. Phần tử $e \in X$ được gọi là phần tử trung lập đối với phép toán T nếu và chỉ nếu với mọi a thuộc X thì eTa = aTe = a.

Định lí 1.1. *Nếu tập X có phần tử trung lập đối với phép toán T thì phần tử trung lập đó là duy nhất.*

Ví dụ 1.2:

1) Số 0 là phần tử trung lập đối với phép cộng thông thường các số tự nhiên (cũng như đối với các phép cộng thông thường các số nguyên, số hữu tỉ và số thực).

2) Số 1 là phần tử trung lập đối với phép nhân thông thường các số tự nhiên (cũng như đối với các phép cộng thông thường các số nguyên, số hữu tỉ và số thực).

3) Tập $\varnothing$ là phần tử trung lập đối với phép lấy hợp các tập hợp trên tập P(X)

4) Tập X là phần tử trung lập đối với phép toán giao các tập hợp trên tập P(X)

5) Ánh xạ đồng nhất $id_x : X \to X$; $x \mapsto x$.

là phần tử trung lập đối với phép hợp thành các ánh xạ trên tập Hom(X, X)

Định nghĩa 1.4. Cho X là một tập hợp với phép toán hai ngôi T và e là phần tử trung lập của X đối với phép toán T; $a \in X$. Phần tử $b \in X$ được gọi là phần tử đối xứng của a đối với phép toán T nếu bTa = aTb = e.

Định lí 1.2. *Cho X là một tập hợp với phép toán hai ngôi T có tính chất kết hợp, có phần tử trung lập e. Nếu b và b' là hai phần tử đối xứng của a thì $b' = b$.*

+) Đối với phép cộng các số tự nhiên chỉ có số 0 có phần tử đối xứng và phần tử đối xứng của 0 là 0.

+) Một cách tổng quát: Nếu $e \in X$ là phần tử trung lập đối với phép toán T thì e là phần tử đối xứng của chính nó.

+) Đối với phép cộng các số nguyên, mỗi phần tử $a \in \mathbb{Z}$ có phần tử đối xứng là $-a \in \mathbb{Z}$.

+) Đối với phép nhân các số hữu tỉ thì mỗi phần tử $q \in \mathbb{Q}$, q khác 0 đều có phần tử đối xứng là $\frac{1}{q} \in \mathbb{Q}$.

+) Đối với phép nhân ánh xạ trong tập Hom(X, X), mỗi song ánh $f : X \to X$ đều có phần tử đối xứng là $f^{-1} : X \to X$ (ánh xạ ngược của f).

Chú ý: Trong thực tế, hai phép toán hai ngôi thường gặp là phép cộng (+) và phép nhân (x).

- Đối với phép cộng : Giả sử + là một phép toán hai ngôi trên tập X thì cái hợp thành a + b được gọi là *tổng* của a và b. Phần tử trung lập (nếu có) được gọi là phần tử không và kí hiệu là 0. Nếu phép cộng có tính chất kết hợp và phần tử $a \in X$ có phần tử đối xứng là b thì khi đó b được xác định duy nhất và được gọi là phần tử đối của a và kí hiệu là –a.

- Đối với phép nhân : Giả sử $\times$ là một phép toán hai ngôi trên tập X thì cái hợp thành a x b (còn được viết là ab hoặc a.b) được gọi là *tích* của a và b. Phần tử trung lập (nếu có) được gọi là phần tử đơn vị và kí hiệu là e (hoặc 1 nếu không có sự nhầm lẫn với các số). Nếu phép nhân có tính chất kết hợp và phần tử $a \in X$ có phần tử đối xứng là b thì khi đó b được xác định duy nhất và được gọi là phần tử nghịch đảo của a và kí hiệu là $b = a^{-1}$.

1.1.4. Phép toán cảm sinh

Định nghĩa 1.5. Cho T là một phép toán hai ngôi trên X và A là một tập con khác rỗng của X. A được gọi là tập con ổn định đối với phép toán T nếu với mọi a, b thuộc A thì cái hợp thành aTb thuộc A. Tức là: $\forall a,b \in A \Rightarrow aTb \in A$.

Ví dụ 1.3:

1) Tập hợp các số tự nhiên chẵn là tập con ổn định của tập các số tự nhiên đối với phép toán cộng.

2) Tập hợp các số tự nhiên $\mathbb{N}$ là tập con ổn định của tập các số nguyên $\mathbb{Z}$ đối với phép cộng và phép nhân. Nhưng nó không ổn định đối với phép trừ..

3) Tập hợp các số nguyên mà là bội của số nguyên m cho trước là tập con ổn định của tập các số nguyên đối với phép cộng và phép nhân.

4) Tập các số nguyên lẻ là tập con ổn định đối với phép nhân các số nguyên; nhưng nó không ổn định đối với phép cộng các số nguyên.

5) Tập S(X) các song ánh từ tập X đến tập X là tập con ổn định của Hom(X, X) đối với phép nhân ánh xạ.

Định nghĩa 1.6. Cho X là một tập hợp với phép toán hai ngôi T và A là một tập con ổn định của X đối với phép toán T. Khi đó ánh xạ:

$$\begin{array}{lll} T: X \times X \to X & \text{cảm sinh ánh xạ:} & T: A \times A \to A. \\ \quad (a;b) \mapsto aTb & & \quad (a;b) \mapsto aTb. \end{array}$$

là phép toán hai ngôi trên A và được gọi là phép toán cảm sinh của phép toán T trên tập hợp A.

Ví dụ 1.4:

1) Phép cộng các số tự nhiên chẵn là phép toán cảm sinh của phép cộng các số tự nhiên.

2) Phép cộng các số nguyên mà là bội của một số nguyên m cho trước là phép toán cảm sinh của phép cộng các số nguyên.

3) Cho S(X) là tập các song ánh từ X đến X; phép hợp thành các song ánh trên tập S(X) là phép toán cảm sinh của phép hợp thành các ánh xạ trên Hom(X, X).

1.2. NỬA NHÓM VÀ NHÓM

1.2.1. Nửa nhóm

Định nghĩa 1.7. Ta gọi là nửa nhóm một tập khác rỗng X cùng với phép toán hai ngôi T trên X có tính chất kết hợp. Nếu trong nửa nhóm X có phần tử trung lập đối với phép toán T thì X được gọi là một vị nhóm. Nếu phép toán T có tính chất giao hoán thì nửa nhóm X được gọi là nửa nhóm giao hoán.

Như vậy, một nửa nhóm là một cấu trúc đại số bao gồm một tập hợp trên đó có một phép toán hai ngôi thỏa mãn tiên đề: $\forall a,b,c \in X, (aTb)Tc = aT(bTc)$.

Để chỉ một nửa nhóm ta viết (X, T) trong đó X là tập nền, T là kí hiệu của phép toán hai ngôi. Trong nhiều trường hợp, nếu không sợ nhầm lẫn ta có thể viết X thay cho (X, T).

Ví dụ 1.5:

1) Tập hợp các số tự nhiên $\mathbb{N}$ với phép cộng thông thường là một vị nhóm giao hoán, phần tử trung lập là 0. Và nó được gọi là vị nhóm cộng các số tự nhiên.

2) Vị nhóm cộng các số nguyên ($\mathbb{Z}$, +) trong đó $\mathbb{Z}$ là tập các số nguyên, + là phép cộng thông thường các số. Đó là một vị nhóm giao hoán.

3) Vị nhóm nhân các số tự nhiên ($\mathbb{N}$, .).

4) Vị nhóm nhân các số nguyên ($\mathbb{Z}$, .).

5) Hom(X, X) tập các ánh xạ từ X đến chính nó cùng với phép hợp thành các ánh xạ là một vị nhóm (nếu X có nhiều hơn một phần tử thì vị nhóm này không giao hoán).

1.2.2. Nhóm

Định nghĩa 1.8. Ta gọi là nhóm một tập hợp X cùng với phép toán hai ngôi T thỏa mãn các tiên đề sau:

(i) (X, T) là một nửa nhóm, tức là $\forall a,b,c \in X, (aTb)Tc = aT(bTc)$.

(ii) Trong X tồn tại phần tử trung lập e đối với phép toán T, tức là $\exists e \in X$ sao cho $eTa = aTe = a$ với mọi $a \in X$.

(iii) Mọi phần tử x thuộc X đều có phần tử đối xứng, nghĩa là tồn tại $x' \in X$ sao cho $x'Tx = xTx' = e$.

Nếu phép toán T có tính chất giao hoán thì nhóm X được gọi là một nhóm giao hoán hay nhóm Aben.

Nếu X là tập hữu hạn, có n phần tử thì X được gọi là nhóm có cấp n. Nếu X là một tập hợp vô hạn thì X được gọi là nhóm có cấp vô hạn.

Nhận xét: Mọi nhóm X là một vị nhóm mà mọi phần tử thuộc X đều có phần tử đối xứng trong X.

Ví dụ 1.6:

1) Tập các số nguyên $\mathbb{Z}$ với phép cộng là một nhóm Aben.

2) Tập các số hữu tỉ $\mathbb{Q}$ với phép cộng là một nhóm Aben.

3) Tập $\mathbb{Q}^*$ các số hữu tỉ khác 0 với phép nhân là một nhóm Aben.

4) Tập S(X) tất cả các song ánh từ X đến X là một nhóm với phép nhân ánh xạ.

Tính chất1.1: Cho X là một nhóm với phép toán là phép nhân, khi đó ta có:

1) Vì một nhóm là một vị nhóm nên nó có đầy đủ các tính chất của một vị nhóm.

2) $\forall a,b,c \in X, ab = ac \Rightarrow b = c$ (luật giản ước bên trái)

và $\forall a,b,c \in X, ba = ca \Rightarrow b = c$ (luật giản ước bên phải).

3) Với mọi a, b thuộc X, các phương trình $ax = b$ và $ya = b$ có nghiệm duy nhất trong X.

Định lí 1.3. *Cho X là một nửa nhóm nhân. X là một nhóm khi và chỉ khi với mọi a, b thuộc X các phương trình $ax = b$ và $ya = b$ có nghiệm duy nhất trong X.*

1.2.3. Nhóm con

Định nghĩa 1.9. Cho X là một nhóm. A là một tập con của X ổn định đối với phép toán trong X. Nếu A cùng với phép toán cảm sinh là một nhóm thì A được gọi là nhóm con của X.

Chú ý: Nếu e là phần tử trung lập của X và A là nhóm con của X thì $e \in A$ cũng là phần tử trung lập của A.

Định lí 1.4. *Cho A là một tập con của nhóm X. Khi đó ba tính chất sau đây là tương đương với nhau:*

(i) A là nhóm con của X.

(ii) Phần tử trung lập $e \in A$ và với mọi a, b thuộc A, ta có $ab \in A$ và $a^{-1} \in A$.

(iii) Phần tử trung lập $e \in A$ và với mọi a, b thuộc A, ta có $ab^{-1} \in A$.

Ví dụ 1.7:

1) Mọi nhóm cộng các số nguyên $\mathbb{Z}$ là một nhóm con của nhóm cộng các số hữu tỉ $\mathbb{Q}$.

2) Tập các số nguyên chẵn $2\mathbb{Z}$ là một nhóm con của nhóm cộng các số nguyên $\mathbb{Z}$.

3) Tập các số nguyên là bội của số nguyên m là một nhóm con của nhóm cộng các số nguyên $\mathbb{Z}$..

4) Tập $A = \{-1,1\}$ là một nhóm con của nhóm nhân các số hữu tỉ khác 0.

5) Với mỗi nhóm X bất kì đều có hai nhóm con đó là X và $\{e\}$, trong đó e là phần tử trung lập của X.

1.3. VÀNH VÀ TRƯỜNG

1.3.1. Định nghĩa vành và trường

Định nghĩa 1.10. Ta gọi là vành một tập hợp X cùng với hai phép toán cộng và nhân thỏa mãn các tiên đề sau:

1. (X, +) là một nhóm Aben.
2. (X, .) là một nửa nhóm.
3. Có luật phân phối hai bên của phép nhân đối với phép cộng, tức là với mọi $a,b,c \in X$. Ta có: $a(b+c) = ab + ac; (b+c)a = ba + ca.$

- Nếu phép nhân có tính chất giao hoán thì X được gọi là vành giao hoán.
- Nếu trong X có phần tử trung lập đối với phép nhân thì X được gọi là vành có đơn vị.

Ví dụ 1.8:

1) Tập hợp các số nguyên $\mathbb{Z}$ cùng với phép cộng và nhân thông thường là một vành giao hoán có đơn vị.

2) Tập các số hữu tỉ $\mathbb{Q}$ cùng với phép cộng và nhân thông thường là một vành giao hoán có đơn vị

3) Tập $X = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$ cùng với hai phép toán cộng và nhân cho trong bảng sau là một vành giao hoán có đơn vị.

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$

x	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Tính chất 1.2:

Cho X là một vành. Theo định nghĩa (X, +) là một nhóm Aben nên nó có đầy đủ các tính chất của một nhóm cộng giao hoán. Cụ thể là:

1) Phần tử không của nhóm X là duy nhất. Ta kí hiệu nó là 0 và cũng gọi là phần tử không của vành X.

2) Mỗi phần tử a thuộc X có một phần tử đối duy nhất là – a.

3) Với mọi a thuộc X, phương trình x + a = b (và a + y = b) có nghiệm duy nhất là b – a

Ngoài ra, trong vành X còn có các tính chất sau:

4) Với mọi a thuộc X, a0 = 0a = 0.

5) Với mọi a, b, c thuộc X ta có: $a(b-c) = ab - ac$.

6) Với mọi a, b thuộc X ta có: $(-a)b = a(-b) = -ab; (-a)(-b) = ab.$

Định nghĩa 1.11. Cho X là một vành giao hoán, phần tử $a \in X$ được gọi là ước của 0 nếu $a \neq 0$ và tồn tại $b \in X, b \neq 0$ sao cho ab = 0.

Định lí 1.5. *Cho X là một vành giao hoán. Các khẳng định sau đây là tương đương với nhau:*

(i) $\forall a, b \in X, ab = 0 \Rightarrow a = 0$ hoặc $b = 0$.

(ii) X không có ước của 0.

(iii) $\forall a, b, c \in X (a \neq 0$ và $ab = ac) \Rightarrow b = c.$

1.3.2. Miền nguyên

Định nghĩa 1.12. Một vành giao hoán, có đơn vị khác 0 và thỏa mãn một trong ba điều kiện tương đương trong định lí 1.5 được gọi là một miền nguyên.

Ví dụ 1.9:

1) Vành các số nguyên $\mathbb{Z}$ là một miền nguyên.

2) Vành X trong ví dụ 1.8 không phải là miền nguyên.

1.3.4. Trường

Định nghĩa 1.13. Một vành giao hoán, có đơn vị khác 0 và trong đó mọi phần tử khác không đều có nghịch đảo được gọi là một trường.

Nhận xét: Cho X là một vành giao hoán, có đơn vị khác 0. X là một trường khi và chỉ khi tập X^* các phần tử khác 0 của X lập thành một nhóm Aben. Nhóm này được gọi là nhóm nhân các phần tử khác không của trường X.

Ví dụ 1.10:

1) Vành các số hữu tỉ $\mathbb{Q}$, vành các số thực $\mathbb{R}$ là những trường.

2) Tập $X = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$ với hai phép toán sau là một trường.

+	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$

x	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

3) Vành số nguyên $\mathbb{Z}$ không phải là một trường.

Định lí 1.6. *Mọi trường đều là miền nguyên.*

Bài tập chương 1

1.1. Phép toán hai ngôi

1. Cho $\mathbb{N}$ là tập các số tự nhiên, $\mathbb{Z}$ là tập các số nguyên, $\mathbb{Q}$ là tập các số hữu tỉ, $\mathbb{Q}^+$ là tập các số hữu tỉ dương.

a) Phép toán nào trong bốn phép tính: cộng, trừ, nhân, chia là phép toán hai ngôi trên mỗi tập kể trên.

b) Trong trường hợp là phép toán hai ngôi, hãy cho biết tính chất và các phần tử đặc biệt của các phép toán đó.

2. Cho tập hợp $X = \{0,1,2\}$. Phép toán $\oplus$ được cho bởi bảng sau:

$\oplus$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Hãy cho biết các tính chất của phép toán $\oplus$ và chỉ ra các phần tử đặc biệt của nó.

3. Cho tập hợp $Y = \{a,b,c\}$. Phép toán * được cho bởi bảng sau:

*	a	b	c
a	a	a	a
b	b	b	b
c	c	c	c

Hãy cho biết các tính chất của phép toán * và chỉ ra các phần tử đặc biệt của nó.

4. Cho $\mathbb{N}^*$ là tập các số tự nhiên khác 0, phép toán T được xác định như sau:

$$T : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$$
$$(a;b) \mapsto a^b.$$

Phép toán T có tính chất giao hoán, kết hợp không? Trong $\mathbb{N}^*$ có phần tử trung lập không?

5. Chứng tỏ rằng các quy tắc cho tương ứng sau đây là những phép toán hai ngôi. Hãy chỉ ra các tính chất của các phép tính đó:

a) $x * y = x + y + xy$ với mọi x, y thuộc $\mathbb{R}$

b) $m \otimes n = m + 2n$ với mọi m, n thuộc $\mathbb{N}$

c) $a \oplus b = a + b - ab$ với mọi a, b thuộc $\mathbb{Q} \setminus \{1\}$.

6. Cho A là tập các số nguyên chẵn, B là tập các số nguyên lẻ. Các tập nào trên hai tập trên ổn định đối với phép toán sau:

a) Phép cộng các số nguyên.

b) Phép nhân các số nguyên.

7. Các tập sau đây, tập nào ổn định đối với phép cộng các phân số:

a) $B=\left\{\frac{a}{b}; a,b\in\mathbb{Z},\ \text{a là số lẻ},\ b\neq 0\right\}$.

b) $C=\left\{\frac{a}{b}; \frac{a}{b}\ \text{là phân số thập phân}\ \right\}$.

1.2. Nửa nhóm và nhóm

1. Cho X là tập các số nguyên chia hết cho 5.

a) Chứng minh rằng X là một vị nhóm với phép cộng thông thường các số.

b) Chứng minh rằng X là một nửa nhóm nhưng không phải là môt vị nhóm với phép nhân thông thường các số.

2. Cho $\mathbb{N}^*$ là tập các số tự nhiên khác 0. Ta định nghĩa $m\otimes n=m+n-1$ với mọi $m,n\in\mathbb{N}^*$

a) Tìm: $2\otimes 1$; $4\otimes 5$; $5\otimes 5$.

b) Chứng minh rằng $\mathbb{N}^*$ là một vị nhóm giao hoán với phép toán $\otimes$.

3. Giả sử X là một tập hợp tùy ý. Xét phép toán hai ngôi:

$$*: X^2\to X$$
$$(x;y)\mapsto x*y=x$$

Chứng minh X là một nửa nhóm với phép toán hai ngôi trên. Nửa nhóm đó có giao hoán, có đơn vị không?

4. Chứng minh các tập hợp sau với phép toán thông thường lập thành một nhóm:

a) Tập hợp các số thực có dạng $a+b\sqrt{3}, a,b\in\mathbb{Z}$ với phép cộng

b) Tập hợp các số thực có dạng $a+b\sqrt{3}, a,b\in\mathbb{Q}, a^2+b^2\neq 0$ với phép nhân.

5. Cho tập hợp $A=\{0,1,2\}$. Chứng minh rằng A là một nhóm Aben với phép toán $\oplus$ cho trong bảng sau:

$\oplus$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

6. Chứng minh rằng tập hợp các số nguyên $\mathbb{Z}$ là một nhóm Aben với phép toán sau: $a \otimes b = a + b - 1$, với mọi a, b thuộc $\mathbb{Z}$.

7. Cho X là một nhóm với đơn vị là e. Chứng minh rằng nếu $x^2 = e$ với mọi $x \in X$ thì X là một nhóm Aben.

8. Giả sử a và b là hai phần tử của một nhóm X sao cho ab = ba. Chứng minh $(ab)^n = a^n b^n$ với mọi số tự nhiên n > 1.

Nếu a và b là hai phần tử sao cho $(ab)^2 = a^2 b^2$ thì ta có suy ra ab = ba được không?

1.3. Vành và trường

1. Gọi X và Y là tập các số nguyên chia hết cho 3 và 5. Chứng minh rằng X và Y cùng với hai phép toán cộng và nhân thông thường đều là những vành giao hoán. Các vành này có đơn vị không?

2. Đặt $C_{100} = \{a \in \mathbb{Z} : a$ chẵn, $|a| \le 1\}$ và $B_{100} = \left\{a \in \mathbb{Z} : |a| \le 100\right\}$. Các tập C_{100} và B_{100} cùng với phép cộng và phép nhân thông thường có lập thành một vành không? Giải thích tại sao?

3. Cho $(\mathbb{R}, +, \times)$ là một vành, với $a, b \in \mathbb{R}$ ta định nghĩa: $a \times a = ab - ba$. Chứng minh rằng phép toán x thỏa mãn tính chất sau:

a) $a \times a = 0.$

b) $a \times b = (-b) \times a.$

c) $[(a \times b) \times c] + [(b \times c) \times a] + [(c \times a) \times b] = 0$.

4. Chứng minh rằng nếu vành X thỏa mãn $a^2 = 0$ với mọi $a \in \mathbb{R}$ thì $ab = -ba$ với mọi $a, b \in \mathbb{R}.$

5. Cho k là một số nguyên lớn hơn 1. Chứng minh rằng $(\mathbb{Z}_k, \oplus, \otimes)$ là một vành giao hoán có đơn vị, trong đó $\mathbb{Z}_k$ và các phép toán $\oplus, \otimes$ được cho bởi quy tắc sau:

$\mathbb{Z}_k = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{k-1}\}$ và $\overline{a} \oplus \overline{b} = \overline{c}$ với c là dư của phép chia a + b cho k; $\overline{a} \otimes \overline{b} = \overline{d}$ với d là dư của phép chia ab cho k.

6. Chứng minh rằng $(\mathbb{Z}_k, \oplus, \otimes)$ với $k \geq 2$ là một trường khi và chỉ khi k là một số nguyên tố.

7. Cho $X = \{a + b\sqrt{2} \,|\, a, b \in \mathbb{Q}\}$. Chứng minh rằng X cùng với phép cộng và phép nhân thông thường là một trường.

Chương 2

SỐ TỰ NHIÊN

MỤC TIÊU

Kiến thức: Trang bị cho người học những kiến thức về:

- Tập hợp tương đương và bản số của tập hợp.
- Xây dựng tập các số tự nhiên bằng lí thuyết tập hợp.
- Xây dựng các phép toán cộng và nhân trên tập các số tự nhiên bằng phép toán trên các bản số.
- Xây dựng quan hệ thứ tự trên tập các số tự nhiên.
- Nguyên lí quy nạp và phương pháp chứng minh quy nạp.
- Biểu diễn số tự nhiên và các dấu hiệu chia hết.

Kĩ năng:

- Giải toán trong tập các số tự nhiên.
- Vận dụng vào việc giảng dạy toán ở các lớp bậc Tiểu học.

Thái độ:

Đây là phần mang tính lí thuyết và liên quan nhiều nội dung môn toán ở bậc Tiểu học, do đó người học cần thoát khỏi những gì đã được biết về các số thông thường. Đồng thời người học cần thấy được ý nghĩa của việc xây dựng tập số tự nhiên, trên cơ sở giúp cho họ giảng dạy tốt hơn môn toán bậc Tiểu học.

2.1. BẢN SỐ CỦA TẬP HỢP

2.1.1. Tập hợp tương đương

Định nghĩa 2.1. Cho hai tập hợp A và B. Ta nói rằng A tương đương với B, kí hiệu $A \sim B$, nếu tồn tại một song ánh từ tập hợp A đến tập hợp B.

Ví dụ 2.1:

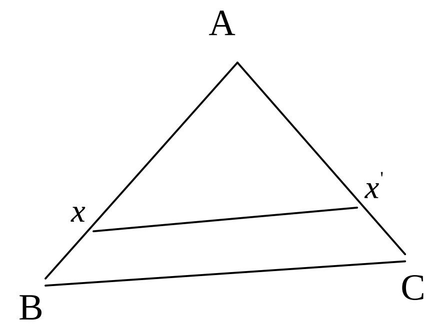
1) Cho $A=\{a,b,c\}; B=\{\alpha,\beta,\gamma\}$. Khi đó $A \sim B$ vì có song ánh $f: A \to B, a \mapsto \alpha; b \mapsto \beta; c \to \gamma$.

2) Cho tam giác ABC. Tập hợp các điểm của cạnh AB tương đương với tập các điểm của cạnh AC.

Thật vậy:

Đặt [AB] là tập các điểm của cạnh AB;

[AC] là tập các điểm của cạnh AC.



Ta có song ánh $f:[AB]\to[AC]$

xác định bởi f(A) = A; f(B) = C và nếu $x\in[AB]$

mà $x\neq A, x\neq B$ thì $f(x)=x^{'}$, trong đó $x^{'}\in[AC]$ mà $xx^{'}$ // BC.

Tính chất 2.1:

1) Với mỗi tập hợp A ánh xạ đồng nhất $id_A: A\to A$ là một song ánh, nên ta có $A\sim A$

2) Cho hai tập hợp A và B, nếu $A\sim B$ tức là có một song ánh $f:A\to B$. Khi đó ánh xạ ngược $f^{-1}:B\to A$ cũng là một song ánh nên suy ra $B\sim A$.

3) Cho ba tập hợp A, B, C, nếu $A\sim B$ và $B\sim C$, tức là có các song ánh $f:A\to B$ và $g:B\to C$. Khi đó $gf:A\to C$ cũng là một song ánh, suy ra $A\sim C$.

Vậy quan hệ $\sim$ có ba tính chất phản xạ, đối xứng và bắc cầu. Do tính chất đối xứng của quan hệ $\sim$ nên, nếu $A\sim B$(hoặc $B\sim A$) thì ta cũng nói hai tập hợp A và B tương đương nhau..

2.1.2. Định lí Cantor

Với hai tập hợp A và B bất kì, bao giờ cũng xảy ra một trong hai trường hợp sau:

1) Có một đơn ánh từ tập A đến tập B.

2) Có một đơn ánh từ tập B đến tập A.

Nếu cả hai trường hợp trên cùng xảy ra thì có một song ánh từ tập hợp A đến tập hợp B.

Nhận xét: Cho hai tập hợp A và B. Nếu có một đơn ánh f từ tập A đến tập B thì có một song ánh từ A đến f(A) và khi đó A tương đương với f(A) là một bộ phận của B. Và ngược lại, nếu A tương đương với một bộ phận $B^{'}$ của B thì có một song ánh $g:A\to B^{'}$ và g có thể kéo dài thành một đơn ánh $g^{'}$ từ A đến B.

$$g^{'}:A\to B$$

$$a\mapsto g^{'}(a).$$

Vì vậy, định lí Cantor còn có thể phát biểu cách khác là:

Cho hai tập hợp A và B bất kì, bao giờ cũng xảy ra một trong hai trường hợp sau:

1) A tương đương với một tập con của B.

2) B tương đương với một tập con của A.

Nếu cả hai trường hợp trên cùng xảy ra thì A tương đương với B.

2.1.3. Tập hợp hữu hạn, tập hợp vô hạn

Định nghĩa 2.2. Tập hợp A được gọi là tập hợp hữu hạn nếu A không tương đương với bất kì tập con thực sự nào của A.

Một tập không phải là tập hợp hữu hạn được gọi là tập hợp vô hạn. Nói cách khác, tập hợp A được gọi là tập hợp vô hạn nêu có một tập con thực sự của A mà tương đương với A.

Ví dụ 2.2:

1) Tập rỗng $\varnothing$ là một tập hợp hữu hạn, vì $\varnothing$ không có một tập con thực sự nào.

2) Tập $\{x\}$ là một tập hữu hạn, vì $\{x\}$ chỉ có một tập con thực sự là tập rỗng $\varnothing$, mà $\varnothing$ không tương đương với $\{x\}$.

3) Tập các điểm trên đoạn AB $(A \neq B)$ là một tập vô hạn. Thật vậy, gọi C là trung điểm của AB khi đó $[AC] \subset [AB]$ và $[AC] \neq [AB]$, đồng thời có thể chỉ ra rằng $[AC] \sim [AB]$.

Định lí 2.1.

- *Tập hợp tương đương với tập hữu hạn là một tập hữu hạn.*
- *Tập con của một tập hợp hữu hạn là một tập hữu hạn.*

2.1.2. Bản số

2.1.2.1. Khái niệm về bản số

Để mở rộng khái niệm "số" phần tử của một tập hợp hữu hạn. Cantor đã đưa ra khái niệm bản số của một tập hợp để đặt trưng cho "số lượng" các phần tử của tập hợp.

Mỗi tập hợp có một bản số. Bản số của tập hợp A kí hiệu $|A|$ hoặc cardA; hai tập hợp có bản số bằng nhau khi và chỉ khi chúng tương đương nhau (bản số của hai tập hợp A và B là bằng nhau, $|A| = |B|$ khi và chỉ khi A và B tương đương với nhau, nghĩa là có một song ánh từ tập A đến tập B).

Ví dụ 2.3:

1) $|\varnothing| \neq |\{x\}|$.

2) $|\{x, y\}| \neq |\{x, y, z\}|$.

2.1.2.2. Quan hệ thứ tự giữa các bản số

Giả sử a và b là hai bản số. Khi đó, tồn tại các tập hợp A và B sao cho $a = |A|$ và $b = |B|$.

Định nghĩa 2.3. Bản số a được gọi là bé hơn hay bằng bản số b, kí hiệu là $a \leq b$, nếu và chỉ nếu tồn tại một đơn ánh f từ A đến B.

Điều này nghĩa là A tương đương với một tập con của B.

Tính chất 2.2: Quan hệ $\leq$ có các tính chất sau:

1) Với mọi bản số a, $a \leq a$.

2) Với mọi bản số a, b, c nếu $a \leq b$ và $b \leq c$ thì $a \leq c$(do hợp thành của hai đơn ánh là một đơn ánh).

3) Với hai bản số a và b khi đó hoặc $a \leq b$ hoặc $b \leq a$. Nếu đồng thời có $a \leq b$ và $b \leq a$ thì a = b.

Như vậy, quan hệ $\leq$ giữa các bản số có các tính chất phản xạ, phản đối xứng và bắc cầu.

2.1.2.3. Phép cộng các bản số

Định lí 2.2. *Cho* A, A', B, B' *là những tập hợp sao cho* $A \sim A'$, $B \sim B'$, $A \cap B = \varnothing$ *và* $A' \cap B' = \varnothing$ *khi đó* $A \cup B \sim A' \cup B'$.

Định lí 2.3. *Nếu a và b là hai bản số thì tồn tại hai tập A và B sao cho* $a = |A|, b = |B|$ *mà* $A \cap B = \varnothing$.

Định nghĩa 2.4. Cho a và b là hai bản số, $a = |A|$ và $b = |B|$ sao cho $A \cap B = \varnothing$. Khi đó $|A \cup B|$ được gọi là tổng của hai bản số a và b, kí hiệu a + b.

Như vậy $a + b = |A \cup B|$, phép toán này được gọi là phép cộng.

Tinh chất 2.3: Phép cộng các bản số có các tính chất sau:

- Giao hoán: Với mọi bản số a và b ta có a + b = b + a, (điều này được suy từ tính chất giao hoán của phép hợp các tập hợp).

- Kết hợp: Với mọi bản số a, b và c ta có (a + b) + c = a + (b + c), (điều này được suy từ tính chất kêt hợp của phép hợp các tập hợp).

- Với mọi bản số a ta có a + 0 = a, (điều này được suy ra từ tính chất là với mọi tập hợp A, ta có $A \cup \varnothing = A$).

- Với mọi bản số a và b, nếu a + b = 0 thì a = b = 0, (điều này được suy ra từ tính chất: Nếu hai tập hợp A và B mà $A \cup B = \varnothing$ thì $A = \varnothing$ và $B = \varnothing$).

Định lí 2.4. *Giả sử a và b là hai bản số. Khi đó,* $a \le b$ *nếu và chỉ nếu tồn tại bản số c sao cho a + c = b.*

Định lí 2.5. *Với hai bản số a và b, a + 1 = b + 1 khi và chỉ khi a = b.*

2.1.2.4. Phép nhân các bản số

Định lí 2.6. Cho $A, A^{'}, B$ và $B^{'}$ là những tập hợp sao cho $A \sim A^{'}$ và $B \sim B^{'}$. Khi đó $A \times B \sim A^{'} \times B^{'}$.

Định nghĩa 2.5. Cho a và b là những bản số, $a = |A|, b = |B|$. Bản số của tích Đề-các $A \times B$ được gọi là tích của hai bản số a và b, kí hiệu là a.b hay ab. Như vậy: $ab = |A \times B|$.

Phép toán trên được gọi là phép nhân các bản số.

Tính chất 2.4:

Dựa vào tính chất của Đề-các của các tập hợp, ta có các tính chất sau đây của phép nhân các bản số:

- Tính chất giao hoán: với mọi bản số a và b ta có ab = ba.
- Tính chất kết hợp: với mọi bản số a, b và c ta có (ab)c = a(bc).
- Với mọi bản số a ta có: 0a = 0; a0 = 0 và 1a = a; a1 = a.
- Với mọi bản số a và b nếu ab = 0 thì a = 0 hoặc b = 0.
- Phép nhân phân phối đối với phép cộng: với mọi bản số a, b và c ta có:

a(b + c) = ab + ac.

(b + c)a = ba + ca.

2.2. SỐ TỰ NHIÊN

2.2.1. Tập các số tự nhiên

2.2.1.1. Số tự nhiên

Bản số của một tập hữu hạn được gọi là một số tự nhiên hay còn gọi là một bản số hữu hạn.

Tập tất cả các số tự nhiên ta kí hiệu là $\mathbb{N}$.

Ví dụ 2.4:

1) 0 là một số tự nhiên vì $0 = |\varnothing|$, $\varnothing$ là tập hữu hạn.

2) 1 là một số tự nhiên vì $1 = |\{x\}|$, $\{x\}$ là tập hữu hạn.

Nhận xét: a là một số tự nhiên khi và chỉ khi $a \neq a+1$.

2.2.1.2. Số tự nhiên kề sau

Định lí 2.7. *Nếu a là một số tự nhiên thì a + 1 cũng là một số tự nhiên.*

Định nghĩa 2.6. Với mỗi số tự nhiên a, số tự nhiên a + 1 được gọi là số tự nhiên kề sau của a (ta còn nói a là số kề trước a + 1).

Định lí 2.8. . *Ánh xạ* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ *(*$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$*),* $a \mapsto a+1$*, là một sonh ánh từ* $\mathbb{N}$ *đến* $\mathbb{N}^*$.

Hệ quả:

-. Mỗi số tự nhiên a đều có duy nhất một số kề sau. Hai số khác nhau có những số kề sau khác nhau. Số 0 không kề sau của bất kì số nào.

- Tập $\mathbb{N}$ các số tự nhiên là một tập hợp vô hạn.

2.2.2. Phép cộng và phép nhân các số tự nhiên

2.2.2.1. Phép cộng các số tự nhiên

Định lí 2.9. *Tổng của hai số tự nhiên là một số tự nhiên.*

Hệ quả: Tập $\mathbb{N}$ các số tự nhiên cùng với phép cộng là một vị nhóm giao hoán.

Định lí 2.10. *Phép cộng các số tự nhiên thỏa mãn luật giản ước, tức là với mọi số tự nhiên a, b và c nếu a + b = a + c thì b = c.*

2.2.2.2. Phép nhân các số tự nhiên

Định lí 2.11. *Tích của hai số tự nhiên là một số tự nhiên.*

Nhận xét: Do phép nhân các bản số có tính chất giao hoán, kết hợp và mọi bản số a ta có a.1 = 1 nên tập các số tự nhiên với phép nhân là một vị nhóm giao hoán.

Ngoài ra vị nhóm này còn có các tính chất sau:

+) $\forall a \in \mathbb{N}, a0 = 0 = 0a$.

+) $\forall a,b \in \mathbb{N}, ab = 0 \Leftrightarrow a = 0$ hoặc $b = 0$.

+) $\forall a,b,c \in \mathbb{N}, a(b+c) = ab + ac; (b+c)a = ba + ca.$

2.2.3. Quan hệ thứ tự trong $\mathbb{N}$

Trong tập hợp $\mathbb{N}$ các số tự nhiên, quan hệ thứ tự $\leq$ được xác định như sau:

Cho a, b thuộc $\mathbb{N}$, $a \leq b \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{N}$ sao cho a + c = b. nếu $a \leq b$ và $a \neq b$ thì ta nói rằng a nghiêm ngặt bé hơn b và kí hiệu $a < b$.

Tính chất 2.5:

1) Với mọi số tự nhiên a, $0 \leq a$.

2) Với mọi số tự nhiên a, $a \leq a$.

Hai tính chất trên được suy ra từ đẳng thức a = 0 + a.

3) Quan hệ $\leq$ có tính chất bắc cầu, nghĩa là nếu a, b, c là ba số tự nhiên sao cho $a \leq b$ và $b \leq c$ thì $a \leq c$.

4) Quan hệ $\leq$ có tính chất đối xứng, nghĩa là nếu $a \leq b$ và $b \leq a$ thì a = b.

5) Với mọi a, b thuộc $\mathbb{N}$ hoặc $a \leq b$ hoặc $b \leq a$.

Định lí 2.12. *Mọi tập con khác rỗng của $\mathbb{N}$ đều có số bé nhất. Tức là $(\mathbb{N}, \leq)$ là một tập sắp thứ tự tốt nhất.*

Định nghĩa 2.7. Cho A là một tập con khác rỗng của tập $\mathbb{N}$. Ta nói rằng A bị chặn trên bởi số tự nhiên c nếu $\forall a \in A, a \leq c.$

Định lí 2.13. *Mọi tập con khác rỗng, bị chặn trên của $\mathbb{N}$ đều có số lớn nhất.*

2.2.3.2. Phép trừ các số tự nhiên

Định nghĩa 2.8. Cho hai số tự nhiên a và b, $a \leq b$.Khi đó tồn tại số tự nhiên c sao cho a + c = b. Số c được gọi là hiệu của a và b, kí hiệu là c = b – a.

Phép toán trên đây được gọi là phép trừ các số tự nhiên.

Chú ý rằng hiệu b – a chỉ thực hiện được khi $a \leq b$.

Định lí 2.14. *Giả sử $a,b,c \in \mathbb{N}$ sao cho $a \leq b$. Khi đó $c(b-a) = cb - ca$.(Tính chất phân phối của phép nhân đối với phép trừ).*

Định lí 2.15. *Có luật giản ước của phép nhân đối với các số tự nhiên khác 0. Nghĩa là nếu a, b, c là ba số tự nhiên, $a \neq 0$ sao cho ab = ac thì b = c.*

2.3. LÍ THUYẾT CHIA HẾT TRÊN TẬP CÁC SỐ TỰ NHIÊN

2.3.1. Phép chia hết và phép chia có dư

2.3.1.1. Phép chia hết

Cho hai số tự nhiên a và b, ta nói rằng a chia hết b (hay b chia hết cho a) nếu tồn tại số tự nhiên c sao cho ac = b.

Kí hiệu $a|b$ (đọc là a chia hết b, hay a là ước của b), hoặc $b \vdots a$ (đọc là b chia hết cho a, hay b là bội của a).

2.3.1.2. Tính chất:

1) $\forall a \in \mathbb{N}^*$ thì $a|0$; $a|a$ và $1|a$.

2) $\forall a, b, c \in \mathbb{N}^*$, $a|b$ và $a|c \Rightarrow a|(b+c)$.

3) $\forall a, b, c \in \mathbb{N}.a \neq 0$, $a|b \Rightarrow a|bc$.

4) $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$, $a \neq 0$, $a|b$ và $b|c \Rightarrow a|c$.

2.3.1.3. Định lí về phép chia có dư

Cho hai số tự nhiên a và b, $b \neq 0$. *Khi đó, tồn tại duy nhất hai số tự nhiên q và r sao cho* $a = bq + r$ *với* $0 \leq r < b$.

2.3.2. Ước chung lớn nhất

2.3.2.1. Khái niệm

Số tự nhiên d được gọi là ước chung của các số tự nhiên a và b nếu d là ước của a và của b.

Với mỗi số tự nhiên a, kí hiệu Ư(a) là tập các ước của a. Ta luôn có $1 \in$Ư(a) và nếu $a \neq 0$ thì Ư(a) là một tập hợp hữu hạn.

Cho hai số tự nhiên a và b khác 0. Khi đó tập các ước chung của a và b là

Ư(a)$\cap$Ư(b)$\neq \varnothing$ và bị chặn trên bởi a và b, tập này có số lớn nhất.

Số lớn nhất trong tập các ước chung của a và b được gọi là ước chung lớn nhất của a và b, kí hiệu là ƯCLN(a, b).

Ví dụ 2.5:

ƯCLN(6, 21) = 3; ƯCLN(12, 7) = 1.

2.3.2.2. Cách tìm ước chung lớn nhất: (*Thuật toán Ơclit*)

Giả sử a, b, q, r là những số tự nhiên, $b \neq 0$ thỏa mãn $a = bq + r$. Khi đó ƯCLN(a, b) = ƯCLN(b, r).

Ví dụ 2.6: Tìm ƯCLN(804, 144)

Ta thực hiện các phép biến đổi như sau:

$840 = 144 \times 5 + 84$; $144 = 84 \times 1 + 60$;

$84 = 60 \times 1 + 24$; $60 = 24 \times 4 + 12$;

$24 = 12 \times 2$.

Vậy ƯCLN(804, 144) = 12.

2.3.2.3. Tính chất của ƯCLN

1. *Cho d là ước chung lớn nhất của hai số tự nhiên a và b. Nếu c là ước chung của a và b thì c là ước của d.*

2. *Cho $a, b \in \mathbb{N}^*$, d = ƯCLN(a, b). Khi đó:*

a) Với mọi số tự nhiên k thì ƯCLN(ka, kb) = kd.

b) Nếu c là một ước chung của a và b, thì ƯCLN($\frac{a}{c}, \frac{b}{c}$) = $\frac{d}{c}$.

3. *Cho a, b, c là ba số tự nhiên sao cho ƯCLN(a, b) = 1, khi đó ƯCLN(ac, b) = ƯCLN(c, b).*

2.3.2.4. Các số nguyên tố cùng nhau

Định nghĩa 2.9. Hai số tự nhiên a và b được gọi là nguyên tố cùng nhau nếu ƯCLN(a, b) = 1.

- Các số tự nhiên $a_1, a_2, ..., a_n$ được goi là nguyên tố cung nhau nếu ước chung lớn nhất của chúng bằng 1.
- Các số tự nhiên $a_1, a_2, ..., a_n$ được gọi là nguyên tố sánh đôi nếu các số tự nhiên này đôi một nguyên tố cùng nhau.

Ví dụ 2.7:

1) Các số 3, 9, 17 là ba số nguyên tố cùng nhau nhưng không nguyên tố sánh đôi.

2) Các số 3, 7, 25 là ba số nguyên tố sánh đôi.

Nhận xét: Cho ba số tự nhiên a, b và c.

1. Nếu a nguyên tố cùng nhau với b và nguyên tố cùng nhau với c thì a nguyên tố cung nhau với bc.

2. Nếu a nguyên tố cùng nhau với b và a là ước của bc thì a là ước của c.

3. Giả sử d là một ước chung của hai số tự nhiên a và b khác 0, d = ƯCLN(a, b) khi và chỉ khi ƯCLN($\frac{a}{d},\frac{b}{d}$) = 1.

2.3.3. Bội chung nhỏ nhất

2.3.3.1. Bội chung và bội chung nhỏ nhất

Cho a là một số tự nhiên khác 0. Tập hợp các bội của a là tập tất cả các số tự nhiên có dạng ma, $m \in \mathbb{N}$.

Giả sử $a_1, a_2, ..., a_n$ là những số tự nhiên khác 0. Số tự nhiên b được gọi là bội chung của các $a_i; i = 1, 2, ..., n$ nếu b là bội của a_i với mọi i = 1, 2, …, n.

Đặt B là tập hợp các bội chung của $a_1, a_2, ..., a_n$. Do đó B có số bé nhất khác 0. Số bé nhất đó được gọi là bội chung nhỏ nhất của $a_1, a_2, ..., a_n$, kí hiệu là

BCNN($a_1, a_2, ..., a_n$).

Ví dụ 2.8:

BCNN(2, 7, 16) = 112.

2.3.3.2. Cách tìm bội chung nhỏ nhất

Định lí 2.20. *Với hai số tự nhiên a và b khác 0 ta có :*

$$BCNN(a,b) = \frac{a \times b}{UCLN(a,b)}.$$

Hệ quả:

- Hai số tự nhiên a và b nguyên tố cung nhau khi và chỉ khi BCNN(a, b) = a.b.
- BCNN(a, b) là ước của mọi ước chung của a và b.

Ví dụ 2.9:

$$BCNN(36,15) = \frac{36 \times 15}{3} = 180.$$

2.3.3.3. Các tính chất của bội chung nhỏ nhất

Cho a và b là hai số tự nhiên khác 0. Khi đó:

1. Với mọi số tự nhiên $c \neq 0$ ta có BCNN(ca, cb) = c.BCNN(a, b).

2. Nếu d là một ước chung của a và b thì $BCNN(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = \frac{1}{d} BCNN(a, b)$.

3. Cho m là một bội chung của a và b, m = BCNN(a, b) khi và chỉ khi $\frac{m}{a}$ và $\frac{m}{b}$ nguyên tố cung nhau.

2.3.4. Số nguyên tố và hợp số

Định nghĩa 2.10. Số tự nhiên p được gọi là một số nguyên tố nếu p > 1 và p chỉ có hai ước số (tự nhiên) là 1 và p.

Số tự nhiên a > 1 không là số nguyên tố được gọi là hợp số.

Ví dụ 2.10:

Các số 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 là những số nguyên tố. Các số 4, 6, 8, 9, 10, 12 là những hợp số.

Định lí 2.21. *Mọi số tự nhiên lớn hơn 1 đều có một ước số nguyên tố.*

Hệ quả

- Với mọi hợp số a bao giờ cũng có một ước số nguyên tố không vượt quá $\sqrt{a}$.
- Tập hợp các số nguyên tố là một tập hợp vô hạn.

Định lí 2.22. *Cho p là một số nguyên tố. Với mọi số tự nhiên a, hoặc a chia hết cho p hoặc a và p nguyên tố cùng nhau.*

Định lí 2.23. *Cho p là một số nguyên tố, a và b là hai số tự nhiên. Nếu p là ước của ab thì p là ước của a hoặc p là ước của b.*

2.3.4.1. Định lí cơ bản của số học

. Với mọi số tự nhiên a > 1 đều phân tích được thành tích những số nguyên tố, sự phân tích đó là duy nhất nếu không kể thứ tự các thừa số.

Ví dụ 2.11:

Phân tích a = 3500 thành tích những thừa số nguyên tố.

Trong thực hành ta phân tích a thành tích những thừa số nguyên tố từ bé đến lớn. Ta có bảng sau:

2940	2
1470	2
735	3
245	5
49	7
7	7

Vậy 2940 = 2.2.3.5.7.7

2.3.4.2. Dạng phân tích tiêu chuẩn

Trong sự phân tích số tự nhiên a > 1 thành một tích những thừa số nguyên tố có thể có nhiều thừa số bằng nhau. Giả sử $p_1, p_{2,...,} p_k$ là các thừa số nguyên tố đôi một khác nhau của a và $\alpha_i, \alpha_i \geq 1, (i = \overline{1,n})$ là các thừa số cùng là p_i trong sự phân tích của a. Khi đó $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$ được gọi là dạng phân tích tiêu chuẩn của số tự nhiên a.

Ví dụ 2.12:

Cho a = 3500; b = 2940. Ta có $a = 2^2.3^0.5^3.7^1; b = 2^2.3^1.5^1.7^2$ là dạng phân tích tiêu chuẩn của a và b.

2.3.4.3. Ứng dụng của định lí cơ bản.

Định lí 2.24. *Cho a là một số tự nhiên có sự phân tích tiêu chuẩn là* $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$. *Số tự nhiên d là ước của a khi và chỉ khi d có dạng:*

$d = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} ... p_k^{\beta_k}$ *với* $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i; i = 1, 2, ..., k.$

Định lí 2.25 . *Cho a và b là hai số tự nhiên có sự phân tích là*

$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_n^{\alpha_n}$ *và* $b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} ... p_n^{\beta_n}$, p_i *là những số nguyên tố,*

$\alpha_i, \beta_i \geq 0; i = 1, 2, ..., n$. *Khi đó:*

$d = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} ... p_n^{\gamma_n}, \gamma_i = \min(\alpha_i, \beta_i), i = 1, 2, ..., n$ *là ước chung lớn nhất của a và b.*

$m = p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} ... p_n^{\delta_n}$, $\delta_i = \max(\alpha_i, \beta_i), i = 1, 2, ..., n$ *là bội chung nhỏ nhất của a và b.*

Ví dụ 2.13:

Cho a = 3500; b = 2940. Ta có $a = 2^2.3^0.5^3.7^1; b = 2^2.3^1.5^1.7^2$. Khi đó :

$ƯCLN(2940, 3500) = 2^2.7.5 = 140;\ \ BCNN(2940, 3500) = 2^2.3.5^3.7^2 = 73500.$

2.4. HỆ GHI SỐ

2.4.1. Hệ ghi số g – phân

2.4.1.1. Mở đầu

Định lí 2.26. *Giả sử g là một số tự nhiên lớn hơn 1. Khi đó, mỗi số tự nhiên a > 0 đều biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng:*

$$a = c_n g^n + c_{n-1} g^{n-1} + ... + c_1 g^1 + c_0 ,$$

Với $n \geq 0, 0 \leq c_i \leq g - 1; i = 0, 1, ..., n$ *và* $c_n > 0$.

Định nghĩa 2.11. Gỉa sử a là số tự nhiên khác 0, g là số tự nhiên lớn hơn 1 nếu: $a = c_n g^n + c_{n-1} g^{n-1} + ... + c_1 g^1 + c_0$, với $0 \leq c_i \leq g - 1; i = 0, 1, ..., n$ và $c_n > 0$ thì ta viết: $a = \overline{c_n g^n + c_{n-1} g^{n-1} + ... + c_1 g^1 + c_0}_{\,g}$ và nói đó là sự biểu diễn số tự nhiên a trong hệ g – phân.

Như vậy, để biểu diễn một số tự nhiên a trong hệ g – phân ta chỉ cần dùng g kí hiệu, mỗi kí hiệu được gọi là một chữ số (vì $0 \leq c_i \leq g - 1$). Chẳng hạn để ghi số trong hệ thập phân ta chỉ cần dùng 10 kí hiệu là các chữ số 0, 1, 2, …, 9, còn nếu g > 10 ta phải đặt thêm các kí hiệu mới.

2.4.1.2. Biểu diễn số tự nhiên trong hệ g - phân

Để biểu diễn một số tự nhiên trong hệ g – phân, ta có thể tìm cách biểu diễn thông qua một số ví dụ cụ thể sau đây:

Ví dụ 2.14:

Biểu diễn số 3749 trong hệ 7 – phân (hệ thất phân). Để thực hiện liên tiếp và các thương của phép chia đó cho 7 ta viết như sau:

$$\begin{array}{llllll}
3749 & 7 & & & & \\
24 & 535 & 7 & & & \\
39 & & 4576 & 7 & & \\
\boxed{4} & \boxed{3} & \boxed{6} & 10 & 7 & \\
 & & & \boxed{3} & 1 & 7 \\
 & & & & \boxed{1} & 0
\end{array}$$

Vậy: $c_0 = 4, c_1 = 3, c_2 = 6, c_3 = 3, c_4 = 1$ và $3749 = \overline{13634_7}$.

2.4.1.3. Đổi cơ số

Về nguyên tắc, để đổi một số trong hệ g – phân sang một số trong hệ g' - phân ta thực hiện liên tiếp phép chia số đó và các thương của phép chia đó cho g'. Tuy nhiên, việc chuyển đổi một số được ghi trong hệ g – phân sang một số trong hệ g' - phân thường được thực hiện bằng cách: đổi số đó từ hệ g – phân sang hệ thập phân, rồi từ hệ thập phân sang hệ g' - phân.

+) Việc chuyển đổi một số trong hệ thập phân sang hệ g – phân đã được trình bày ở trên.

+) Việc chuyển đổi một số trong hệ g – phân sang hệ thập phân được thực hiện qua ví dụ sau.

Ví dụ 2.15:

1) Viết số $\overline{14024_7}$ sang số trong hệ thập phân.

Theo định nghĩa ta có:

$$\begin{aligned}
\overline{14027_7} &= 1.7^4 + 4.7^3 + 0.7^2 + 2.7 + 4 \\
&= 1.2401 + 4.343 + 18 \\
&= 2401 + 1372 + 18 = 3791.
\end{aligned}$$

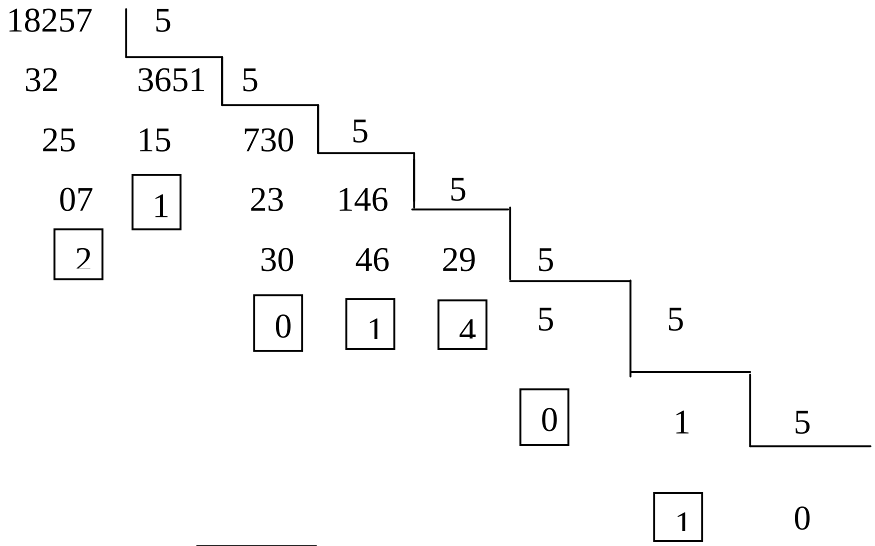
2) Đổi số $\overline{43521_8}$ trong hệ bát phân sang hệ 5 – phân (ngũ phân)

Ta có:

$$\begin{aligned}
\overline{43521_8} &= 4.8^4 + 3.8^3 + 2.8^3 + 5.8 + 1 \\
&= 4.4096 + 3.521 + 5.64 + 17
\end{aligned}$$

$$= 16384 + 1536 + 320 + 17 = 18257$$

Đổi số 18257 sang hệ 5 – phân ta được:



Vậy: $18257 = \overline{1041012}_5$

Cuối cùng ta được: $\overline{43521}_8 = \overline{1041012}_5$.

2.4.1.4. So sánh các số trong hệ g – phân

Để so sánh các số trong hệ g – phân, ta cũng dựa vào quy tắc so sánh các số như trong quy tắc so sánh các số trong hệ thập phân.

2.4.1.5. Thực hành phép tính trong hệ g – phân

Để thực hiện phép cộng và phép nhân trong hệ g – phân, ta cần lập bảng cộng và bảng nhân các chữ số của hệ g – phân, trên cơ sở đó thực hiện các phép tính với các số có nhiều chữ số bằng cách sử dụng quy tắc nhớ.

Chú ý: Khi lập bảng cộng và nhân, ta thực hiện phép tính trong hệ thập phân rồi đổi kết quả ra hệ g – phân.

Để nắm được cách thực hiện phép cộng và phép nhân trong hệ g – phân, ta tìm hiểu qua các ví dụ sau:

Ví dụ 2.16:

1) Trong hệ thập phân ta có 5.5 = 25 và $25 = 4.6 + 1 = \overline{41}_6$

2) a) Tính: $\overline{435412}_6 + \overline{41535}_6$

Ta viết:

$$\begin{array}{r} 435412 \\ + \\ 41535 \\ \hline 521351 \end{array}$$

Vậy $\overline{435412}_6 + \overline{41535}_6 = \overline{521351}_6$

b) Tính: $\overline{43521}_6 \times \overline{23}_6$

Ta viết:

$$\begin{array}{r} 34251 \\ \times \\ 23 \\ \hline 152403 \\ 113442 \\ \hline 1331223 \end{array}$$

Vậy: $\overline{43521}_6 \times \overline{23}_6 = \overline{1331223}_6$.

2.4.1.6. Hệ nhị phân

Để ghi một số trong hệ nhị phân ta dùng hai chữ số là 0 và 1. Trong kĩ thuật người ta có thể dùng hai chữ số đó để chỉ hai trạng thái đóng mạch và ngắt mạch.

Ta có bảng cộng và bảng nhân trong hệ nhị phân như sau:

(Bảng cộng)

+	0	1
0	0	1
1	1	10

(Bảng nhân)

×	0	1
0	0	0
1	0	1

Ví dụ 2.17:

$$25 = \overline{11001}_2; \quad 17 = \overline{10001}_2.$$

2.4.2. Các dấu hiệu chia hết

2.4.2.1. Dấu hiệu chia hết cho 2 và 5

Định lí 2.27. *Một số chia hết cho 2 (hoặc 5) khi và chỉ khi chữ số hàng đơn vị của số đó chia hết cho 2 (hoặc 5), cụ thể:*

a) Một số chia hết cho 2 khi và chỉ khi nó có chữ số hàng đơn vị là 0, 2, 4, 6 hoặc 8.

b) Một số chia hết cho 5 khi và chỉ khi chữ số hàng đơn vị của nó là 0 hoặc 5.

Ví dụ 2.18:

a) Các số sau chia hết cho 2: 12; 36; 108; 34; 250…

b) Các số sau chia hết cho 5: 150; 315…

c) Các số có chữ số hàng đơn vị là 0 thì chia hết cho 2 và cho 5

Chăng hạn: 10; 20; 130. …

2.4.2.2. Dấu hiệu chia hết cho 4 và 25

Định lí 2.28. *Một số chia hết cho 4 (hoặc 25) khi và chỉ khi số tạo bởi hai chữ số cuối cùng của nó chia hết cho 4 (hoặc 25).*

Ví dụ 2.19:

a) Các số sau chia hết cho 4: 2012; 1980…

b) Các số sau chia hết cho 25: 250; 11275…

2.4.2.3. Dấu hiệu chia hết cho 3 và 9

Định lí 2.29. Một số chia hết cho 3 (hoặc 9) khi và chỉ khi tổng các chữ số của nó chia hết cho 3(hoặc 9).

Ví dụ 2.20:

a) Các số sau chi hết cho 3: 111021; 301206…

b) các số sau chia hết cho 9: 13419; 540360…

2.4.2.2. Dấu hiệu chia hết cho 11

Định lí 2.30. *Một số chia hết cho 11 khi và chỉ khi tổng các chữ số hàng chẵn trừ tổng các chữ số hàng lẻ là một bội của 11.*

Ví dụ 2.21:

- Số 91282235 chia hết cho 11 vì (9 + 2 + 2 + 3) – (1 + 8 + 2 + 5) = 0.
- Số 9873215 chia hết cho 11 vì (9 + 7 + 2 + 5) – (8 + 3 + 1) = 11.

2.5. NỘI DUNG CƠ SỞ CỦA TOÁN HỌC VỀ VIỆC DẠY HỌC SỐ TỰ NHIÊN Ở BẬC TIỂU HỌC

2.5.1. Nội dung dạy học số tự nhiên ở Tiểu học

Số học là mạch kiến thức cơ bản, cốt lõi của chương trình môn toán Tiểu học. Mạch số học tạo thành từ bốn phần: số học các số tự nhiên, số học các phân số, số học các số thập phân và một số yếu tố đại số; trong đó, số học các số tự nhiên giữ vai trò trung tâm. Nó được trình bày theo phương pháp đồng tâm từ lớp 1 đến hết học kì đầu của lớp 4.

Phần số học các số tự nhiên bao gồm các nội dung: hình thành khái niệm số tự nhiên, so sánh các số tự nhiên, các phép tính trên các số tự nhiên và giải toán về số tự nhiên.

2.5.1.1. Hình thành khái niệm về số tự nhiên

Sách giáo khoa lần lượt giới thiệu cho học sinh:

+) 10 chữ số cơ bản

+) Số có hai và nhiều chữ số

+) Hàng và lớp của một số tự nhiên có nhiều chữ số

+) Số tự nhiên chẵn, số lẻ, số tròn chục, tròn trăm…

+) Số tự nhiên liên tiếp, dãy số tự nhiên

+) tia số…

2.5.1.2. So sánh số tự nhiên

Sau khi hình thành cho học sinh khái niệm lớn hơn và bé hơn, sách giáo khoa giới thiệu các quy tắc so sánh các số tự nhiên có nhiều chữ số và thực hành so sánh các số tự nhiên.

2.5.1.3. Các phép tính trên các số tự nhiên

Thông qua các vòng số: trong phạm vi 10, 100, 1000, 10 000, 100 000 và các số có nhiều chữ số, sách giáo khoa đã giới thiệu cho học sinh bốn phép tính: cộng, trừ, nhân, chia các số tự nhiên. Đối với mỗi phép tính, sách giáo khoa lần lượt cung cấp cho học sinh:

+) Hình thành ý nghĩa của mỗi phép toán;

+) Phép tính (cộng, trừ, nhân, chia) trong bảng;

+) Quy tắc thực hành phép tính (cộng, trừ, nhân, chia) ngoài bảng với các số có nhiều chữ số;

+) Tính chất của phép tính (giao hoán, kết hợp, phân phối, tính chất của số 0, số 1…);

+) Kĩ năng tính nhẩm;

+) Các dấu hiệu chia hết cho 2, 3, 5 và 9.

2.5.1.4. Giải toán về số tự nhiên

Hoạt động giải toán có một vị trí quan trọng trong dạy – học nói chung và dạy – học số tự nhiên nói riêng. Thông qua việc giải toán về số tự nhiên, từng bước học sinh được phát triển tư duy, rèn luyện phương pháp và kĩ năng suy luận lôgíc, khêu gợi và tập dượt khả năng quan sát, phỏng đoán, tìm tòi. Các bài toán thường gặp về số tự nhiên ở Tiểu học có thể phân thành bốn dạng sau:

+) Các bài toán về cấu tạo số tự nhiên;

+) Các bài toán về rèn kĩ năng thực hành so sánh các số tự nhiên;

+) Các bài toán nhằm rèn luyện kĩ năng thực hành bốn phép tính về số tự nhiên;

+) Vận dụng kĩ năng thực hành tính toán về số tự nhiên để giải toán có lời văn và toán có nội dung hình học…

2.5.2. Cơ sở toán học của việc dạy học một số vấn đề về số tự nhiên ở bậc Tiểu học

- Dùng bản số tập hợp, bằng ngôn ngữ của tiểu học, sách giáo khoa toán 1 đã hình thành cho học sinh 10 chữ số cơ bản (từ 0 đến 9). (xem SGK Toán 1)

- Bằng phương pháp suy luận tương tự, sách giáo khoa giới thiệu cho học sinh các số có hai và nhiều chữ số.

- Dùng bản số tập hợp, bằng ngôn ngữ của tiểu học, sách giáo khoa Toán 1 đã hình thành cho học sinh khái niệm "lớn hơn", "bé hơn" và quan hệ so sánh trong phạm vi 10 (xem SGK Toán 1).

- Bằng phương pháp quy nạp (không hoàn toàn), sách giáo khoa đã giới thiệu cho học sinh quy tắc so sánh các số tự nhiên có nhiều chữ số (xem SGK Toán 3 và Toán 4).

- Quy tắc thực hành bốn phép tính và các tính chất của bốn phép tính về số tự nhiên được giới thiệu cho học sinh bằng phương pháp quy nạp.

Chú ý: Thông qua kiến thức về cấu trúc đại số, số tự nhiên mà người học được trang bị bằng những kiến thức của toán học cao cấp, người học cần phải chọn cách tiếp cận với nội dung về số tự nhiên mà học sinh Tiểu học được học.

Bài tập chương 2

2.1. Bản số của tập hợp

1. Cho $A = \{1,2,3,4\}, B = \{a,b,c,d\}$. Hãy chỉ ra hai song ánh từ A đến B. Có bao nhiêu song ánh từ A đến B.

2. Cho ba tập hợp A, B và C. Chứng minh rằng:

a) $A \times B \sim B \times A$.

b) $(A \times B) \times C \sim A \times (B \times C)$.

3. Cho hai tập hợp A và B với $B \neq \varnothing$. Chứng minh rằng $|A| \leq |A \times B|$.

4. Cho tập hợp A. Chúng minh rằng A là một tập hữu hạn khi và chỉ khi mọi đơn ánh từ A đến A đều là song ánh.

5. Cho A là một tập hợp hữu hạn, $f: A \to A$ là một ánh xạ. Chứng minh rằng các khẳng định sau đậy là tương đương với nhau.

a) f là đơn ánh;

b) f là toàn ánh;

c) f là song ánh.

6. Cho A và B là hai tập hợp hữu hạn. Chứng minh: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \times B$ là các tập hữu hạn.

2.2. Số tự nhiên

1. Chứng minh rằng, tập các số tự nhiên $\mathbb{N}$ và tập các số tự nhiên khác 0 là tương đương nhau. Từ đó suy ra rằng tập hợp các số tự nhiên là một tập hợp vô hạn.

2. Cho hai số tự nhiên a và b. Chứng minh:

a) a + b = 0 khi và chỉ khi a = b = 0.

b) ab = 0 khi và chỉ khi a = 0 hoặc b = 0.

c) ab = 1 khi và chỉ khi a = b = 1.

3. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên a, b, c , d ta có:

a) $a \leq a + b$.

b) Nếu $b \neq 0$ thì $a \leq ab$.

c) Nếu $a \leq b$ và $c \leq d$ thì $a + c \leq b + d$ và $ac \leq bd$.

d) Nếu a < b và c < d thì a + c < b + d và ac < bd.

4. Cho a, b, c, d là những số tự nhiên và $a \geq b; c \geq d$. Chứng minh rằng $a - b = c - d$ khi và chỉ khi $a + d = b + c$.

2.3. Lí thuyết chia hết trên tập các số tự nhiên

1. Chứng minh rằng tích của ba số tự nhiên liên tiếp chia hết cho 3 và chia hết cho 6.

2. Trong định lí về phép chia có dư: $a = bq + r, \quad 0 \leq r < b.$

a) Cho biết a = 420 và b = 205. Hãy tìm q và r.

b) Cho biết a = 335 và q = 11. Hãy tìm b và r.

c) Cho biết a = 137 và r = 39. Hãy tìm b và q.

3. Chứng minh rằng trong hai số chẵn liên tiếp có một và chỉ một số chia hết cho 4.

4. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ta có:

a) $n^2 - n$ chia hết cho 2;

b) $n^3 - n$ chia hết cho 3;

c) $n^5 - n$ chia hết cho 5.

5. Cho n là một số tự nhiên. Chứng minh rằng:

a) ƯCLN(3n + 1, 2n + 1) = 1;

b) ƯCLN(21n + 4, 14n + 3) = 1.

6. Cho n là một số tự nhiên lớn hơn 1. Tìm:

a) BCNN(3n + 1, 2n + 1);

b) BCNN(21n + 4, 14n + 3).

7. Cho a và b là hai số tự nhiên. Hãy viết a và b dưới dạng phân tích tiêu chuẩn và tìm ƯCLN và BCNN của a và b.

a) a = 300 và b = 210;

b) a = 310 và b = 2100;

c) a = 3465 và b = 875.

2.4. Hệ ghi số

1. Biểu diễn số 2014 sang hệ g – phân sau đây:

a) Hệ nhị phân.

b) Hệ ngũ phân.

2. Hãy biểu diễn các số sau đây trong hệ thập phân:

a) $\overline{10011010_2}$.

b) $\overline{32145612_7}$.

c) $\overline{321412_5}$.

3. Trong hệ ghi số cơ số nào thì:

a) Số 63 được viết là $\overline{77}_g$.

b) Số 92 được viết là $\overline{332}_g$.

c) Số 12 được viết là $\overline{1100}_g$.

4. Xác định cơ số g để cách viết sau đây là đúng:

a) $\overline{213}_g + \overline{125}_g = \overline{342}_g$;

b) $\overline{4652}_g + \overline{3464}_g = \overline{10226}_g$;

5.

a) Biểu diễn số $a = \overline{234153_7}$ trong hệ lục phân (g = 6);

b) Biểu diễn số $b = \overline{2345213_8}$ trong hệ ngũ phân (g = 5).

6. Chứng minh rằng:

a) Trong mọi hệ ghi cơ số g > 2, số $\overline{121}_g$ là một số chính phương (tức là bằng bình phương của một số tự nhiên);

b) Trong hệ ghi số sơ số g > 6, số $\overline{14641}_g$ là lũy thừa bốn của một số tự nhiên.

7. Chứng minh rằng các số dạng $2^n - 1, (n > 0)$ khi được viết trong hệ nhị phân thì chỉ gồm toàn chữ số 1.

8. Tìm dấu hiệu chia hết cho 2, cho 3 trong hệ lục phân.

Chương 3

TẬP SỐ HỮU TỈ VÀ TẬP SỐ THỰC

MỤC TIÊU

Kiến thức

Cung cấp cho người học những kiến thức về:

- Xây dựng tập số hữu tỉ không âm và các phép toán trong tập số hữu tỉ không âm;
- Tập số thập phân và các phép toán trong tập số thập phân;
- Cơ sở toán học của nội dung dạy phân số và số thập phân;
- Xây dựng tập số hữu tỉ và tập số thực.

Kĩ năng

Hình thành và rèn luyện cho người học các kĩ năng:

- Giải toán trong tập số hữu tỉ không âm và số thập phân không âm;
- Giải toán về phân số và số thập phân ở Tiểu học.

Thái độ

Người học chủ động tìm tòi khám phá và phát hiện những cơ sở toán học của việc dạy học phân số và số thập phân ở Tiểu học.

3.1. XÂY DỰNG SỐ HỮU Tỉ KHÔNG ÂM

3.1.1. Sự cần thiết phải xây dựng tập số hữu tỉ không âm

Như chúng ta đã biết, tổng và tích của hai số tự nhiên bất kỳ là một số tự nhiên. Trong khi đó, thương của hai số tự nhiên không phải lúc nào cũng là một số tự nhiên. Chẳng hạn: 4 : 7 hoặc 15 : 9…

Trong thực tế, tập số tự nhiên không đủ để biểu diễn số đo của nhiều phép đo đại lượng. Chẳng hạn, khi chia đều 5 quả cam cho 4 người thì số quả cam mỗi người được chia không thể biểu diễn bằng một số tự nhiên hoặc khi đo chiều dài một lớp học được 6m2dm5cm thì khi dùng đơn vị là mét không thể biểu diễn số đo bằng một số tự nhiên…

Về phương diện toán học, nhiều tính chất của phép cộng, trừ, nhân, chia trên phân số và số thập phân được đưa vào chương trình môn toán ở trường phổ thông hầu hết là công nhận chứ chưa được chứng minh chặt chẽ.

Trong chương này, ta nghiên cứu phương pháp mở rộng tập hợp số tự nhiên cùng với các phép toán và quan hệ thứ tự giữa chúng để khắc phục những hạn chế trên.

3.1.2. Xây dựng tập số hữu tỉ không âm

Cho $\mathbb{N}$ là tập các số tự nhiên và $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$;

Mỗi cặp sắp thứ tự (a; b), trong đó $a \in \mathbb{N}$ và $b \in \mathbb{N}^*$ ta gọi là một phân số. Tập tất cả các phân số ta kí hiệu là P. Như vậy: $P = \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.

Ta sử dụng kí hiệu $\frac{a}{b}$ để chỉ phân số (a; b), trong đó a gọi là tử số, b gọi là mẫu số. Như vậy:

$$P = \left\{ \frac{a}{b} \middle| a \in \mathbb{N}; b \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Trên P ta định nghĩa quan hệ hai ngôi $"\sim"$ như sau:

$$\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in P; \frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc.$$

Dễ dàng chỉ ra rằng quan hệ $"\sim"$ là một quan hệ tương đương trên P. Khi đó trên P có sự chia lớp theo quan hệ tương đương $"\sim"$ và nhận được tập thương $P/\sim$, kí hiệu là $\mathbb{Q}_+$. Mỗi phần tử của $\mathbb{Q}_+$ ta gọi là một số hữu tỉ không âm. Tập $\mathbb{Q}_+$ gọi là tập số hữu tỉ không âm.

Chú ý:

1) Khái niệm phân số hình thành trên đây đồng nhất với khái niệm phân số hình thành trong trường phổ thông.

2) Rõ ràng là quan hệ tương đương $"\sim"$ đồng nhất với quan hệ bằng nhau giữa các phân số (được xây dựng ở trường phổ thông) nhưng không đồng nhất với quan hệ bằng nhau giữa các cặp thứ tự.

3) Vì $\mathbb{Q}_+ = P/\sim$ cho nên với mỗi số hữu tỉ không âm là một lớp những phân số tương đương với nhau. Mỗi phân số thuộc lớp các phân số bằng nhau đó ta gọi là một đại diện của số hữu tỉ không âm ấy.

Chẳng hạn, số hữu tỉ không âm $r = C\left(\frac{3}{4}\right)$ là lớp các phân số $\frac{3}{4}, \frac{6}{8}, \frac{9}{12}, \frac{12}{16}...$

Như vậy, mỗi phân số $\frac{3}{4}$ hoặc $\frac{6}{8}$ hoặc $\frac{12}{16}$… là một đại diện của r.

4) Để cho gọn, ta viết $r = \frac{a}{b}$ thay cho $r = C\left(\frac{a}{b}\right)$ để chỉ số hữu tỉ đại diện là $\frac{a}{b}$

Trong số các đại diện của r tồn tại duy nhất một đại diện là phân số tối giản $\frac{p}{q}$, ở đây p, q nguyên tố cùng nhau. Vì vậy nói đến đại diện của số hữu tỉ r, ta thường hiểu là phân số tối giản $\frac{p}{q}$ đó.

5) Mỗi số tự nhiên n có thể coi là một phân số có mẫu số bằng 1, thành thử $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}_+$.

3.2. CÁC PHÉP TOÁN TRONG TẬP CÁC SỐ HỮU TỈ KHÔNG ÂM

3.2.1. Phép cộng và phép nhân

Định nghĩa 3.1. Cho r và r' là hai số hữu tỉ không âm có các phân số đại diện là $\frac{a}{b}$ và $\frac{a'}{b'}$ tương ứng. Ta gọi:

- Tổng của hai số hữu tỉ không âm r và r' là một số hữu tỉ không âm s, kí hiệu là $r + r' = s$ trong đó s là số hữu tỉ không âm có đại diện là $\frac{ab' + ba'}{bb'}$. Phép cho tương ứng mỗi cặp số hữu tỉ không âm (r, r') với số hữu tỉ không âm s gọi là phép cộng các số hữu tỉ.

- Tích của hai số hữu tỉ không âm r và r' là số hữu tỉ không âm p, kí hiệu là: $r \times r'$(hay $r.r'$ hay rr') = p, trong đó p là số hữu tỉ không âm có phân số đại diện là $\frac{aa'}{bb'}$. Phép cho tương ứng mỗi cặp số hữu tỉ không âm (r, r') với số hữu tỉ không âm p gọi là phép nhân các số hữu tỉ không âm.

Ví dụ 3.1:

Giả sử r và $r^{'}$ là hai số hữu tỉ không âm có đại diện là $\frac{2}{3}$ và $\frac{11}{7}$ tương ứng. Khi đó tổng $r+r^{'}$ là số hữu tỉ không âm s có đại diện là $\frac{2.7+3.11}{3.7}=\frac{47}{21}$ và tích $rr^{'}$ là số hữu tỉ không âm p có đại diện là $\frac{2.11}{3.7}=\frac{22}{21}$.

Tính chất 3.1:

1) Tổng của hai số hữu tỉ không âm không phụ thuộc vào việc lựa chọn phân số đại diện của chúng

2) Tích của hai số hữu tỉ không âm không phụ thuộc và các phân số đại diện của chúng.

Định lí 3.1. *Phép cộng và phép nhân các số hữu tỉ không âm thỏa mãn các tính chất sau:*

(i). Tính chất giao hoán:

$r+r^{'}=r^{'}+r$ *và* $rr^{'}=r^{'}r$ *với mọi* $r,r^{'}\in\mathbb{Q}_{+}$.

(ii). Tính chất kết hợp:

$(r+r^{'})+r^{"}=r+(r^{'}+r^{"})$ *với mọi* $r,r^{'},r^{"}\in\mathbb{Q}_{+}$.

(iii). Phần tử trung lập:

- Tồn tại duy nhất phần tử $0\in\mathbb{Q}_{+}$ *sao cho r + 0 = r và*

- Tồn tại duy nhất phần tử $1\in\mathbb{Q}_{+}$ *sao cho r . 1 = r với mọi* $r\in\mathbb{Q}_{+}$

Ta gọi 0 là phần tử trung hòa (đối với phép cộng) và 1 là phần tử trung hòa (đối với phép nhân).

(iv). Phần tử nghịch đảo:

Với mọi $r\in\mathbb{Q}_{+}$, $r\neq 0$ *tồn tại phần tử* $r^{-1}\in\mathbb{Q}_{+}$ *sao cho* $r.r^{-1}=1$. *Ta gọi* r^{-1} *là phần tử nghịch đảo của r. Đôi khi ta viết* $\frac{1}{r}$ *thay cho* r^{-1}.

(v). Tính phân phối của phép nhân đối với phép cộng:

$r(r^{'}+r^{"})=rr^{'}+rr^{"}$ với mọi $r,r^{'},r^{"}\in\mathbb{Q}_{+}$.

(vi). Luật giản ước:

Nếu r + t = s + t thì r = s với mọi $t\in\mathbb{Q}_{+}$ *và nếu rt = st thì r = s với mọi* $t\in\mathbb{Q}_{+},t\neq 0$.

(vii). Tập $\mathbb{N}$ *ổn định với phép cộng và phép nhân các số hữu tỉ không âm.*

3.2.1. Phép trừ

Định nghĩa 3.2. Cho r và s là hai số hữu tỉ không âm có phân số đại diện là $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$ tương ứng. Ta gọi hiệu của số hữu tỉ r trừ đi s là một số hữu tỉ u (kí hiệu u = r – s) trong đó u là số hữu tỉ có phân số đại diện là $\frac{ad-cb}{bd}$; nếu ad – cb là số tự nhiên.

Hay $C\left(\frac{a}{b}\right)-C\left(\frac{c}{d}\right)=C\left(\frac{ad-cb}{bd}\right)$.

Quy tắc cho tương ứng với mỗi cặp số hữu tỉ r và s với một số hữu tỉ u nói trên ta gọi là phép trừ các số hữu tỉ không âm. Trong đó r là số bị trừ, s là số trừ và u là hiệu số.

Ví dụ 3. 2:

Cho $r=\frac{5}{6}; s=\frac{2}{7}$. Ta có $r-s=\frac{5\times 7-2\times 6}{6\times 7}=\frac{23}{42}$, trong khi đó s – r không thực hiện được vì $2\times 6-5\times 7$ không phải là số tự nhiên.

Định lí 3.2. *Phép trừ các số hữu tỉ không âm thỏa mãn các tính chất sau:*

r – s = u khi và chỉ khi u + s = r.

r(s- t) = rs – rt nếu một trong hai vế có nghĩa.

3.2.2. Phép chia

Định nghĩa 3.3. Cho r và s là hai số hữu tỉ không âm, trong đó $s\neq 0$. Ta gọi thương của số hữu tỉ r chia cho s là số hữu tỉ q, kí hiệu r : s = q, thỏa mãn điều kiện $q\times s=r$.

Quy tắc cho tương ứng mỗi cặp số hữu tỉ r và s với mỗi số hữu tỉ q nói trên ta gọi là phép chia các số hữu tỉ không âm, trong đó r là số bị chia, s là số chia và q là thương số.

Nhận xét: Giả sử $r,s\in\mathbb{Q}_+, s\neq 0$. Theo định lí 3.1, tồn tại duy nhất số nghịch đảo s^{-1} của s. Đặt $q=r\times s^{-1}$, ta có $qs=(rs^{-1})s=r(s^{-1}s)=r.1=r.$

Ví dụ 3.3:

Tìm thương của r và s biết $r=\frac{20}{9}$ và $s=\frac{4}{15}$. Ta có: $r:s=\frac{20}{9}\times\frac{15}{4}=\frac{25}{3}$

3.3. QUAN HỆ THỨ TỰ TRONG $\mathbb{Q}_+$

Định nghĩa 3.4. Cho r và s là hai số hữu tỉ không âm có phân số đại diện là $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$ tương ứng. Ta nói r nhỏ hơn hoặc bằng s, viết là $r \le s$, nếu $ad \le bc$.

Ta nói r nhỏ hơn s, viết là r < s, nếu $r \le s$ và $r \ne s$.

Ta nói $r \ge s$ nếu $s \le r$.

Ta gọi hệ thức $r \le s$ là một bất đẳng thức; hệ thức r < s là bất đẳng thức chặt chẽ hay nghiêm ngặt.

Ví dụ 3.4:

$\frac{2}{5} < \frac{11}{12}$ vì 2.12 = 24 < 55 = 5.11;

$\frac{15}{11} < \frac{23}{2}$ vì 15.2 = 30 < 253 = 11.23;

$\frac{13}{9} > \frac{23}{19}$ vì 13.19 = 247 > 207 = 23.9.

Định lí 3.4. *Quan hệ thứ tự trong tập số hữu tỉ không âm thỏa mãn tính chất:*

(i) Tính đơn điệu: Với mọi $r, s, t \in \mathbb{Q}_+$ *ta luôn có: từ* $r \le s$ *suy ra* $r + s \le s + t$ *và* $rt \le st$. *Đặc biệt nếu r < s và* $t \ne 0$ *thì rt < st (nếu ta cộng hoặc nhân cả hai vế của bất đẳng thức với cùng một số hữu tỉ không âm thì bất đẳng thức không đổi chiều).*

(ii) Tính trù mật: Với mọi $r, s \in \mathbb{Q}_+$*, r < s tồn tại* $t \in \mathbb{Q}_+$ *sao cho r < t < s.*

(iii) Tiên đề Acsimet: Với mọi số hữu tỉ r tồn tại số tự nhiên n sao cho r < n.

(iv) $r + s = 0 \Leftrightarrow r = s = 0$.

3.4. TẬP SỐ HỮU TỈ KHÔNG ÂM TRONG CHƯƠNG TRÌNH MÔN TOÁN BẬC TIỂU HỌC

Nội dung phân số được đưa vào môn Toán trường Tiểu học tương đối hoàn chỉnh, bao gồm:

- Hình thành khái niệm phân số;
- Quan hệ so sánh (so sánh bằng và hơn);

- Bốn phép tính cơ bản (cộng, trừ, nhân và chia): gồm hình thành ý nghĩa và giới thiệu tính chất và quy tắc thực hành bốn phép tính trên phân số, rèn kĩ năng thực hành tính toán về phân số;

- Giải toán về phân số.

3.4.1. Hình thành khái niệm phân số

Thông qua thao tác chia một quả cam thành bốn phần bằng nhau, lấy đi ba phần, hình thành cho học sinh khái niệm phân số $\frac{a}{b}$, trong đó b gọi là mẫu số (là số tự nhiên khác 0) được hiểu là số phần bằng nhau mà đơn vị được chia ra, a là tử số được hiểu là số phần bằng nhau được lấy đi.

Bằng con đường này, chỉ hình thành khái niệm của những phân số nhỏ hơn 1. Bằng cách bổ sung thêm bài toán: "Chia đều 5 quả cam cho 4 người. Tìm phần cam của mỗi người". Qua đó hình thành cho học sinh khái niệm phân số $\frac{a}{b}$ còn được hiểu là thương của hai số tự nhiên a và b.

Dạy hình thành khái niệm phân số ở Tiểu học bao gồm: dạy đọc, viết, cấu tạo phân số và một số phân số có dạng đặc biệt (phân số có mẫu số bằng 1, có tử số bằng 0, có tử số bằng mẫu số…)

3.4.2. So sánh phân số

Quan hệ so sánh trên các phân số ở Tiểu học gồm hai dạng: so sánh bằng (hai phân số bằng nhau) và so sánh hơn (phân số này nhỏ hơn phân số kia).

Bằng những ví dụ trực quan, sách giáo khoa đã hình thành cho học sinh khái niệm phân số bằng nhau. Đồng thời cũng giới thiệu cho học sinh quy tắc để dựa vào đó các em có thể nhận biết hai phân số bằng nhau hay không. Quy tắc được phát biểu như sau:

"Nếu ta nhân hoặc chia cả tử số và mẫu số của một phân số với cùng một số tự nhiên khác 0 thì được một phân số mới bằng phân số đã cho."

Quy tắc trên là cơ sở để học sinh thực hiện phép rút gọn phân số

Khi hai phân số không bằng nhau, để nhận biết phân số nào lớn hơn, học sinh dựa vào quy tắc sau:

“Trong hai phân số không cùng mẫu số, ta quy đồng mẫu số của hai phân số đó rồi so sánh các tử số với nhau (tử số nào lớn hơn thì phân số tương ứng sẽ lớn hơn).

Đặc biệt, nhờ quy tắc này học sinh nhận biết được khi nào một phân số nhỏ hơn, bằng hay lớn hơn 1.

3.4.3. Các phép toán trên phân số

Nhìn chung, mỗi phép tính cộng, trừ, nhân và chia phân số ở Tiểu học được trình bày theo quy trình sau: hình thành phép tính, quy tắc thực hành tính toán và cuối cùng là các tính chất giao hoán, kết hợp và phân phối của các phép toán đó.

Mỗi phép tính đều được hình thành từ một bài toán đơn rất gần gũi với đời sống thực tế. Rồi từ đó rút ra quy tắc thực hành tính toán, Cụ thể là:

- Quy tắc thực hành phép cộng phân số:

  + *Muốn cộng hai phân số cùng mẫu số, ta cộng hai tử số với nhau và giữ nguyên mẫu số*

  + *Muốn cộng hai phân số khác mẫu số, trước hết ta quy đồng mẫu số rồi cộng tử số với tử số và giữ nguyên mẫu số đã quy đồng.*

Cũng tương trự như trên ta phát biểu quy tắc thực hành phép trừ

- Quy tắc thực hành phép chia phân số: Muốn chia hai phân số ta làm như sau:

  + *Lấy tử số của phân số thứ nhất nhân với mẫu số của phân số thứ hai, ta được tử số của thương.*

  + *Lấy mẫu số của phân số thứ nhất nhân với mẫu số của phân số thứ hai ta được mẫu số của thương.*

3.4.4. Tính chất của các phép toán trên phân số

- *Tính chất giao hoán*: Khi đổi chỗ các phân số trong một tổng (hoặc tích) thì tổng (hoặc tích) không thay đổi.
- *Tính chất kết hợp*: Muốn cộng (hoặc nhân) hai phân số với phân số thứ ba, ta có thể cộng (hoặc nhân) phân số thứ nhất với tổng (hoặc tích) của hai phân số còn lại.
- *Tính chất phân phối*: Muốn nhân một tổng của hai phân số với phân số thứ ba, ta có thể nhân từng phân số của tổng với phân số thứ ba, rồi cộng hai kết quả với nhau.

3.4.5. Giải toán về phân số

Các bài toán về phân số có thể phân ra thành mấy dạng cơ bản sau:

- Các bài toán về cấu tạo phân số (tìm một phân số khi biết mối quan hệ giữa tử số và mẫu số của phân số đó)
- Các bài toán về so sánh phân số (bao gồm rút gọn phân số và sắp xếp các phân số theo thứ tự cho trước).
- Các bài toán về rèn kĩ năng thực hành bốn phép tính về phân số (tính giá trị biểu thức bằng cách hợp lí nhất, tìm thành phần chưa biết của phép tính,…).
- Giải toán có lời văn về phân số (bao gồm các bài toán có lời văn với các số liệu cho trong đề bài là phân số).

3.5. TẬP SỐ THẬP PHÂN KHÔNG ÂM

3.5.1. Phân số thập phân

Định nghĩa 3.5. Phân số $\frac{a}{b}$ gọi là phân số thập phân, nếu mẫu số b là lũy thừa của 10 với số mũ tự nhiên ($b = 10^n, n \in \mathbb{N}$).

Ví dụ 3.5:

Các phân số $\frac{13}{10}; \frac{24}{100}; \frac{126}{1000}; \frac{7}{1}$… là phân số thập phân.

Phân số $\frac{3}{4}$ không phải là phân số thập phân nhưng $\frac{3}{4} = \frac{75}{100}$ là phân số thập phân.

Ta gọi phân số $\frac{3}{4}$ là phân số biểu diễn được dưới dạng thập phân

Vậy phân số $\frac{a}{b}$ gọi là biểu diễn được dưới dạng thập phân nếu nó bằng một phân số thập phân nào đó.

Chẳng hạn: $\frac{1}{2}; \frac{7}{25}; \frac{3}{20}$… là những phân số biểu diễn được dưới dạng thập phân.

Các phân số $\frac{1}{3}; \frac{4}{7}; \frac{2}{11}$ …không biểu diễn được dưới dạng thập phân.

Định lí 3.5. *Để phân số tối giản $\frac{a}{b}$ biểu diễn được dưới dạng thập phân, điều kiện cần và đủ là mẫu số b không có ước nguyên tố nào khác 2 và 5.*

Vận dụng định lí 3.4, khi muốn kiểm tra một phân số $\frac{a}{b}$ có phải là phân số thập phân hay không, ta tiến hành như sau:

- Rút gọn phân số đó (để được phân số tối giản $\frac{a^{'}}{b^{'}}$).

- Kiểm tra mẫu số $b^{'}$ có chứa ước nguyên tố nào khác 2 và 5 hay không, nếu có thì phân số đó không biểu diễn được dưới dạng thập phân, ngược lại thì phân số đó biểu diễn được dưới dạng thập phân.

3.5.2. Số thập phân không âm

Số hữu tỉ không âm r được gọi là số thập phân không âm, nếu phân số đại diện của nó biểu diễn được dưới dạng thập phân.

Hay nói cách khác, số hữu tỉ không âm r được gọi là số thập phân không âm nếu nó có một đại diện là phân số thập phân.

Tập tất cả các số thập phân không âm ta kí hiệu là $\mathbb{Q}_{+10}$

Quy ước: Để cho gọn (nếu không sợ nhầm lẫn) trong mục này ta sẽ gọi là số thập phân thay cho số thập phân không âm.

Nhận xét: Mỗi số tự nhiên n là một số thập phân, vì $n = \frac{n}{10^0}$.

3.5.3. Dạng biểu diễn thu gọn của phân số thập phân

Giả sử $r \in \mathbb{Q}_{+10}$, tồn tại số tự nhiên m, k sao cho $r = \frac{m}{10^k}$, ở đây $m = \overline{a_1a_2...a_n}$. Không làm mất tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng $a_n \neq 0$. Trong trường hợp đó ta quy ước:

- Nếu k = 0 thì ta viết $r = \overline{a_1a_2...a_n}$ thay cho $r = \frac{\overline{a_1a_2...a_n}}{1}$

- Nếu 0 < k < n thì ta viết $r = \overline{a_1a_2...a_{n-k}}, a_{n-k+1}a_{n-k+2}...a_n$ thay cho $\frac{\overline{a_1a_2...a_n}}{10^k}$. Tức là dùng dấu "," để tách tử số $\overline{a_1a_2...a_n}$ ra làm hai nhóm: nhóm ở bên trái dấu phẩy là số có n – k chữ số $\overline{a_1a_2...a_{n-k}}$ gọi là phần nguyên và nhóm ở bên phải dấu phẩy gồm k chữ số $a_{n-k+1}a_{n-k+2}...a_n$ gọi là phần thập phân

- Nếu n < k thì ta viết $r = 0,00...0a_1a_2...a_n$, trong đó có k – n chữ số 0 sau dấu phẩy

Chẳng hạn:

Số thập phân $r = \frac{325}{100}$ có dạng biểu diễn thu gọn là 3,25.

Số thập phân $r = \frac{544007}{10^3}$ có dạng biểu diễn thu gọn là 544,007.

Số thập phân $r = \frac{32}{100}$ có dạng biểu diễn thu gọn là 0,32.

Số thập phân $r = \frac{9}{1000}$ có dạng biểu diễn thu gọn là 0,009.

Số thập phân $r = \frac{8}{125}$ có dạng biểu diễn thu gọn là 0,064 vì $\frac{8}{125} = \frac{64}{1000}$.

3.5.4. Các phép toán trên số thập phân

Vì $\mathbb{Q}_{+10} \subset \mathbb{Q}_{+}$, nên các phép toán trong $\mathbb{Q}_{+10}$ được định nghĩa trên cơ sở các phép toán trong $\mathbb{Q}_{+}$. Điều đó có nghĩa là:

1. Muốn cộng (hay trừ) hai số thập phân ở dạng thu gọn ta biểu diễn chúng về dạng phân số thập phân. Sau đó ta cộng (hay trừ) như cộng (hay trừ) hai phân số thập phân, kết quả thu được (là một phân số thập phân) ta đưa về dạng thu gọn của số thập phân.

Ví dụ 3.6: Tìm tổng và hiệu của hai số thập phân:

$$r_1 = 13,098 \text{ và } r_2 = 7,52$$

Ta tiến hành như sau:

$$r_1 + r_2 = 13,098 + 7,52$$

$$= \frac{13098}{1000} + \frac{752}{100} = \frac{13098 + 7520}{1000} = 20,618.$$

$$r_1 - r_2 = 13,098 - 7,52$$

$$= \frac{13098}{1000} - \frac{752}{100} = \frac{13098 - 7520}{1000} = 5,578.$$

Nhận xét: Thực hành phép cộng và phép trừ số thập phân theo quy tắc trên có nhược điểm là cồng kềnh và phức tạp. Vì vậy trong thực tế tính toán người ta thường vận dụng quy tắc cộng (hoặc trừ) các số tự nhiên để cộng (hoặc trừ) các số thập phân sẽ đơn giản và gọn nhẹ hơn. Quy tắc đó được phát biểu như sau:

Muốn cộng hai hay nhiều số thập phân ta làm như sau:

Ta làm cho các chữ số sau dấu phẩy của các số hạng bằng nhau (bằng cách thêm chữ số 0 vào bên phải số có ít chữ số hơn ở phần thập phân).

Viết số hạng này dưới số hạng kia sao cho các dấu phẩy thẳng cột với nhau.

Cộng như cộng các số tự nhiên.

Đặt dấu phẩy ở tổng thẳng cột với dấu phẩy của các số hạng.

Cũng tương tự ta phát biểu quy tắc trừ hai số thập phân. Song nói chung, phép trừ số thập phân không phải bao giờ cũng thực hiện được. Chẳng hạn: $9,035 - 12,1$.

Ví dụ 3.7: Vận dụng quy tắc trên để tìm tổng của hai số thập phân trong ví dụ 3.6

Ta viết 7,52 = 7,520

Đặt phép tính:

$$\begin{array}{r} 13,098 \\ +\quad 7,520 \\ \hline \end{array}$$

- Bỏ dấu phẩy ta được phép cộng hai số tự nhiên, thực hiện phép cộng số tự nhiên ta được kết quả:

$$\begin{array}{r} 13098 \\ +\quad 7520 \\ \hline 20618 \end{array}$$

- Đặt dấu phẩy ở tổng thẳng cột với dấu phẩy của các số hạng ta được kết quả là 20,618.

2. Muốn nhân một số thập phân với một số thập phân ta làm như sau:

- Nhân như nhân hai số tự nhiên;

- Ta đếm xem trong phần thập phân của cả hai thừa số cóa bao nhiêu chữ số rồi dùng dấu phẩy tách ra ở tích bấy nhiêu chữ số kể từ phải qua trái.

Ví dụ 3.8: Tính $4,15 \times 3,8$.

Ta làm như sau:

$$
\begin{array}{r}
4{,}15 \\
\times \quad 3{,}8 \\
\hline
3320 \\
1245 \\
\hline
15{,}770
\end{array}
$$

Trước hết ta thực hiện phép nhân:

$$415 \times 38 = 15770$$

Vì cả hai thừa số có tất cả ba chữ số ở phần thập phân, nên ta dùng dấu phẩy tách ra ở tích ba chữ số kể từ bên phải.

3. Muốn chia một số thập phân cho một số thập phân ta làm như sau:

- Bỏ dấu phẩy ở số chia đồng thời dấu phẩy ở số bị chia từ trái qua phải số chữ số bằng số chữ số ở phần thập phân của số chia (trường hợp số chữ số ở phần thập phân của số chia nhiều hơn số chữ số ở phần thập phân của số chia thì ta viết thêm chữ số 0 vào hàng còn thiếu);

- Chia như chia số tự nhiên, khi chia hết chữ số ở phần nguyên của số bị chia, đặt dấu phẩy ở thương rồi tiếp tục chia;

- Khi chia hết các chữ số ở phần thập phân của số bị chia, nếu còn dư, ta viết thêm chữ số 0 vào bên phải số dư rồi tiếp tục chia.

Ví dụ 3.9:

1. Tính 4,025 : 1,25

$$
\begin{array}{r|l}
402{,}5 & 125 \\
\cline{2-2}
275 & 3{,}22 \\
250 & \\
0 &
\end{array}
$$

Vậy: 4,025 : 1,25 = 3,22.

2. Tính 3,7 : 0,03

$$
\begin{array}{r|l}
370 & 3 \\
\cline{2-2}
7 & 123{,}3 \\
10 & \\
1 &
\end{array}
$$

Vậy: 3,7 : 0,03 = 123,3 dư 0,001.

3.5.5. Quan hệ thứ tự trong tập số thập phân

Mỗi số thập phân là một số hữu tỉ không âm. Vì vậy, việc xây dựng quan hệ thứ tự trong $\mathbb{Q}_{+10}$ ta đưa về so sánh các số hữu tỉ không âm. Chẳng hạn:

Ví dụ 3.10:

Cho r = 9,63; s = 12,1. Hãy so sánh r và s.

Ta có $9,63 = \frac{963}{100}$ và $12,1 = \frac{121}{10}$. Vì $\frac{963}{100} < \frac{121}{10}$ nên 9,63 < 12,1.

Tương tự như đối với phép cộng, xây dựng quan hệ thứ tự trong tập hợp các số thập phân theo cách trên có ưu điểm về lí thuyết nhưng có nhược điểm trong thực hành so sánh. Vì vậy, để so sánh các số thập phân ta thường vận dụng một trong hai quy tắc sau:

Quy tắc 1: Muốn so sánh hai số thập phân ta làm như sau:

Làm cho số chữ số ở phần thập phân của hai số bằng nhau (bằng cách viết thêm chữ số 0 vào hàng còn thiếu);

Bỏ dấu phẩy trong hai số, ta được hai số tự nhiên;

So sánh hai số tự nhiên vừa nhận được, số nào lớn hơn thì số thập phân ứng với nó sẽ lớn hơn. Nếu hai số tự nhiên đó bằng nhau thì hai số thập phân cũng bằng nhau.

Quy tắc 2: Muốn so sánh hai số thập phân ta làm như sau:

So sánh phần nguyên với nhau, số nào có phần nguyên lớn hơn sẽ lớn hơn;

Nếu phần nguyên của chúng bằng nhau thì ta so sánh các chữ số ở phần thập phân bắt đầu từ hàng phần mười. Số nào có chữ số ở hàng tương ứng lớn hơn sẽ lơn hơn;

Nếu phần nguyên và các chữ số ở phần thập phân của chúng đều bằng nhau thì hai số thập phân đó bằng nhau.

Ví dụ 3.11: So sánh hai số $r_1 = 42,096$ và $r_2 = 42,09$

Áp dụng quy tắc 1 ta có:

- $r_1 = 42,096; r_2 = 42,090$
- Bỏ dấu phẩy trong hai số ta nhận được hai số tự nhiên là 42096 và 42090
- Vì 42090 < 42096 nên $r_2 < r_1$.

Áp dụng quy tắc 2 ta có:

Phần nguyên, chữ số phần mười và phần trăm của hai số bằng nhau. Thêm chữ số 0 vào hàng phần nghìn của r_2 và so sánh ta được $r_2 < r_1$.

3.5.6. Số thập phân vô hạn tuần hoàn

Trong các tiết trước, chúng ta đã biết rằng với mỗi số hữu tỉ $r = \frac{a}{b}$ ($\frac{a}{b}$ tối giản) có hai khả năng:

- Nếu mẫu số b không chứa ước nguyên tố khác 2 và 5 thì r là một số thập phân.
- Nếu mẫu số b chứa ước nguyên tố khác 2 và 5 thì r không phải là số thập phân. Trong trường hợp này, ta có thể xấp xỉ r bởi mợt số thập phân với sai số nhỏ tùy ý.
- Trong tiết này, chúng ta sẽ chỉ ra rằng số hữu tỉ như vậy có thể biểu diễn bởi một số thập phân theo nghĩa rộng.

Trước hết ta bắt đầu bằng bài toán cụ thể. Tìm các số thập phân là xấp xỉ của số hữu tỉ $r = \frac{13}{11}$.

Ta có:

- Nếu sai số không vượt quá $\frac{1}{100}$ thì ta sẽ được số 1,18
- Nếu sai số không vượt quá $\frac{1}{1000}$ thì ta sẽ được số 1,181
- Nếu sai số không vượt quá 10^{-6} thì ta sẽ được số 1,181818

Cứ tiếp tục quá trình trên ta đi đến kết quả sau:

- Không bao giờ được một số thập phân “xấp xỉ” mà lại bằng $\frac{13}{11}$.

Thành thử, cứ tiếp tục mãi ta nhận được số thập phân có vô số chữ số ở phần thập phân.

- Các chữ số ở phần thập phân lặp lại một cách tuần hoàn, trong đó mỗi chu kỳ gồm hai chữ số “18”. Trong trường hợp này ta viết:

$$\frac{13}{11} = 1{,}181818...$$

hay $$\frac{13}{11} = 1{,}(18)$$

và gọi là số thập phân vô hạn tuần hoàn với chu kỳ bằng 18.

Tương tự như trên, ta có: $\frac{285}{22} = 12,9(54)$.

Một cách tổng quát, giả sử số hữu tỉ $\frac{a}{b}$ không phải là số thập phân. Ta thực hiện liên tiếp phép chia a cho b (bằng cách thêm chữ số 0 vào bên phải số dư sau mỗi phép chia và tiếp tục chia). Ta sẽ thấy rằng sau một số bước (tối đa là b bước) ta sẽ gặp lại số dư r nào đó mà ta đã gặp ở bước trước đó. Khi đó quá trình sẽ lặp lại. Các thương bộ phận sẽ lặp lại một cách tuần hoàn.   Số thập phân nhận được có vô số chữ số ở phần thập phân, trong đó có một nhóm chữ số ở phần thập phân lặp đi lặp lại một cách tuần hoàn. Nhóm chữ số lặp lại đó được gọi là chu kỳ của số thập phân vô hạn tuần hoàn.

3.6. SỐ THẬP PHÂN TRONG CHƯƠNG TRÌNH MÔN TOÁN BẬC TIỂU HỌC

Khái niệm phân số và số thập phân là những khái niệm quan trọng, được sử dụng thường xuyên trong cuộc sống và sinh hoạt. Vì vậy nó được coi là "chìa khóa" của "cầu nối" giữa toán học và thực tiễn. Nó có vị trí rất quan trọng trong chương trình môn toán lớp 5 nói riêng và môn toán Tiểu học nói chung, nhất là về mặt thực hành tính toán.

3.6.1. Hình thành khái niệm số thập phân

Nhìn chung ở Tiểu học, người ta thường sử dụng hai phương pháp sau đây để hình thành khái niệm số thập phân:

Phương pháp 1: Trong phương pháp này, số thập phân được xây dựng dựa trên cơ sở khái niệm phân số: số thập phân là dạng viết không có mẫu số của phân số thập phân.

Phương pháp 2: Xây dựng khái niệm số thập phân từ phép đo các đại lượng (trong hệ cơ số thập phân). Trong phương pháp này, số thập phân là dạng biểu diễn số đo của một đại lượng bằng cách dùng dấu phẩy phân tách phần nguyên và phần nhỏ hơn đơn vị đo thay cho cách biểu diễn dùng nhiều đơn vị đo hỗn hợp.

Chẳng hạn:

$$15m4dm3cm = 15,43m$$

$$5kg307g = 5,307kg$$

3.6.2. So sánh số thập phân

Quan hệ so sánh trên các số thập phân bao gồm hai dạng:

- *So sánh bằng* thường vận dụng tính chất: “viết thêm chữ số 0 vào bên phải phần thập phân của một số thập phân ta được số thập phân bằng nó”.

- *So sánh hơn* thường vận dụng một trong hai quy tắc trình bày ở mục 3.5.5.

3.6.3. Các phép toán trên số thập phân

Nhìn chung các phép tính cộng, trừ, nhân và chia số thập phân ở Tiểu học được trình bày theo hệ thống sau: hình thành phép tính, quy tắc (biện pháp tính, thực hành tính toán) và tính chất của các phép tính (giao hoán, kết hợp…).

Mỗi phép tính cộng, trừ, nhân và chia số thập phân đều được hình thành từ một bài toán đơn các số đã cho là số đo đại lượng (chiều dài, khối lượng…). Những bài toán đơn đặt vấn đề hình thành phép tính trừ (hoặc phép chia) số thập phân đều là những bài toán ngược với các bài toán hình thành phép cộng (hoặc phép nhân) nhằm làm rõ mối quan hệ xuôi ngược lẫn nhau giữa hai phép tính này.

Xây dựng quy tắc, biện pháp tính cộng, trừ và nhân đều được hình thành theo các bước:

- Đổi số thập phân ra số tự nhiên.
- Thực hành phép tính đối với số tự nhiên (được kết quả là một số tự nhiên)
- Đổi kết quả ra số thập phân.
- Điền kết quả (là số thập phân) vào phép tính đã hình thành ban đầu.
- Rút ra quy tắc tính

Riêng đối với phép chia, quá trình hình thành quy tắc tính được chia làm nhiều bước:

+ Chia một số thập phân cho một số tự nhiên.

+ Chia một số tự nhiên cho một số tự nhiên có thương là số thập phân

+ Chia một số tự nhiên cho một số thập phân.

+ Chia một số thập phân cho một số thập phân.

3.6.4. Giới thiệu các quy tắc tính nhẩm

- Nhân một số thập phân với 10, 100, 1000, …
- Chia một số thập phân với 10, 100, 1000, …

3.6.5. Giải toán về số thập phân

Các bài toán về số thập phân ở Tiểu học có thể phân ra thành mấy dạng cơ bản sau:

Dạng 1: Các bài toán về cấu tạo số thập phân

Khi giải các bài toán dạng này, ta có thể dùng phương pháp liệt kê, phương pháp thử chọn, phương pháp tìm hai số khi biết tổng và tỉ số hoặc hiệu và tỉ số của hai số. Ngoài ra, có thể vận dụng thêm tính chất sau:

Khi dời dấu phẩy của một số thập phân từ trái sang phải (hoặc từ phải sang trái) một, hai, ba,…hàng thì số thập phân đó tăng gấp (hoặc giảm đi) 10, 100, 1000, … lần.

Ví dụ 3.12:

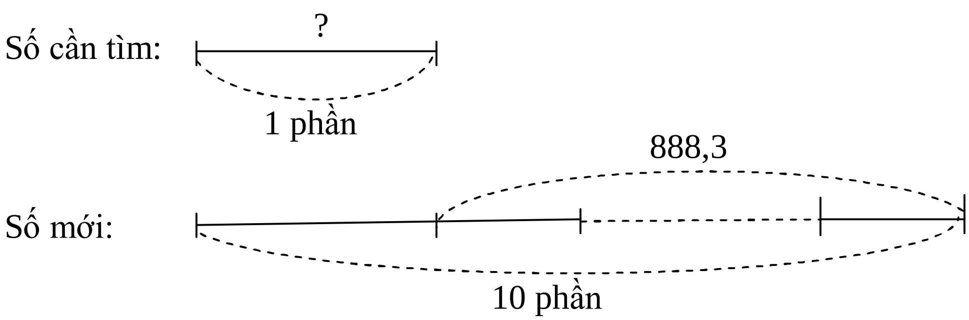
1. Hãy viết các số thập phân từ ba chữ số 0, 1, 2 sao cho mỗi chữ số đã cho xuất hiện đúng một lần

Giải: Các số đó là: 0,12; 0,21; 1,20; 1,02; 2,10; 2,01; 10,2; 12,0; 21,0; 20,1.

2. Khi bỏ quên dấu phẩy của một số thập phân có một chữ số ở phần thập phân thì số đó tăng thêm 888,3 đơn vị. Tìm số thập phân đó.

Giải: Khi bỏ quên dấu phẩy của một số thập phân có một chữ số ở phần thập phân thì số đó tăng gấp 10 lần.

Theo đề bài ta có sơ đồ:



Số cần tìm là:

$$888{,}3 : (10 - 1) = 98{,}7.$$

Dạng 2: Các bài toán về so sánh số thập phân

Khi giải các bài toán dạng này, ta thường vận dụng các quy tắc về so sánh số thập phân như đã trình bày ở trên

Dạng 3: Các bài toán rèn kĩ năng thực hành bốn phép tính về số thập phân

Để giải các bài toán dạng này, ta thường vận dụng các quy tắc thực hiện các phép tính, các tính chất của các phép tính, quy tắc tìm thành phần chưa biết của phép tính và các quy tắc nhân, chia nhẩm,…

Ngoài các quy tắc nhân, chia nhẩm với 10; 100; 1000;… ta có thể bổ sung thêm:

- Quy tắc nhân (hoặc chia) một số với 0,5.
- Quy tắc nhân (hoặc chia) một số với 0.25.

Dạng 4: Các bài toán về điền số vào phép tính

Các bài toán dạng này thường gặp hai loại:

- Vận dụng quy tắc thực hành bốn phép tính để giải.
- Dùng phân tích cấu tạo số để giải.

Ví dụ 3.13: Thay mỗi chữ trong phép tính sau bởi chữ số thích hợp

$$\overline{bdd},bc - \overline{ab},cd = \overline{a},bc$$

Giải: Ta lần lượt biến đổi

$$\frac{\overline{bddbc}}{100} - \frac{\overline{abcd}}{100} = \frac{\overline{abc}}{100}$$

$$\frac{\overline{bddbc} - \overline{abcd}}{100} = \frac{\overline{abc}}{100}$$

Suy ra: $\overline{bddbc} - \overline{abcd} = \overline{abc}$

Ta viết phép tính như sau:

$$\begin{array}{r} abcd \\ + \quad abc \\ \hline bddbc \end{array}$$

Theo cách đặt phép tính thì phép cộng hàng trăm có nhớ (nhớ 1). Vậy phép cộng ở hàng nghìn là: a + 1 = $\overline{bd}$.

Suy ra a = 9, b = 1 và d = 0

Thay vào ta có:

$$\begin{array}{r} 91c0 \\ + \quad 91c \\ \hline 1001c \end{array}$$

Xét phép cộng ở hàng chục: c + 1 = 1. Suy ra c = 0.

Vậy phép tính cần tìm là: 100,10 – 91,00 = 9,10.

Dạng 5: Các bài toán về tỉ số phần trăm

Các bài toán dạng này ta thường gặp mấy loại sau:

- Cho hai số a và b. Tìm tỉ số phần trăm của a và b.
- Cho a và tỉ số phần trăm của a và b. Tìm b.
- Cho b và tỉ số phần trăm của a và b. Tìm a.

Ví dụ 3.14:

1. Một trường Tiểu học có 1040 học sinh trong đó có 546 học sinh nam. Hỏi số học sinh nam chiếm bao nhiêu phần trăm số học sinh toàn trường?

Giải:

Số phần trăm học sinh nam chiếm so với tổng số học sinh của toàn trường là:

$$546:1040 = 52,5\%$$

Đáp số: 52,5%

2. Lãi suất tiết kiệm là 0,65% một tháng. Một người gửi tiết kiệm 12 000 000 đồng. Hỏi sau một tháng người đó có tất cả bao nhiêu tiền lãi và tiền gửi?

Giải:

Số tiền người đó có sau một tháng là:

12 000 000 : 100 × 0,65 = 78 000(đồng)

Số tiền gửi và tiền lãi người đó có là:

12 000 000 + 78 000 = 12 078 000(đồng)

Đáp số: 12 078 000 đồng.

3.7. TẬP SỐ HỮU TỈ

3.7.1. Sự cần thiết phải xây dựng tập số hữu tỉ

Trong các tiết trước, chúng ta đã mở rộng tập số tự nhiên $\mathbb{N}$ để được tập số hữu tỉ không âm $\mathbb{Q}_+$. Nếu dừng lại ở tập số hữu tỉ không âm ta nhận thấy có một số điểm hạn chế sau:

- Nhiều phép trừ không thực hiện được, chẳng hạn: 3 – 5; $\frac{1}{4}-4$, …

- Biểu diễn số đo của hai phép đo đại lượng ngược chiều nhau sẽ gặp khó khăn, chẳng hạn: độ cao và chiều sâu, lỗ và lãi, nhiệt độ trên 0^0C và dưới 0^0C;…

Do nhu cầu phát triển của toán học và các ngành khoa học kỹ thuật khác, người ta mở rộng tập số hữu tỉ không âm $\mathbb{Q}_+$ thêm những số mới để khắc phục các hạn chế trên.

3.7.2. Xây dựng tập số hữu tỉ

Trên tích Đề-các $\mathbb{Q}_+ \times \mathbb{Q}_+$ ta định nghĩa quan hệ hai ngôi như sau:

Với $(r;s)$ và $(r^{'};s^{'})$ thuộc $\mathbb{Q}_+ \times \mathbb{Q}_+$ ta định nghĩa $(r;s) \sim (r^{'};s^{'}) \Leftrightarrow r + s^{'} = r^{'} + s$.

Ta dễ dàng suy ra $"\sim"$ là một quan hệ tương đương xác định trên $\mathbb{Q}_+ \times \mathbb{Q}_+$. Từ đó ta có thể phân chia tập $\mathbb{Q}_+ \times \mathbb{Q}_+$ theo quan hệ tương đương $"\sim"$ và nhận được tập thương $\mathbb{Q}_+ \times \mathbb{Q}_+ / \sim$.

Ta gọi tập thương $\mathbb{Q}_+ \times \mathbb{Q}_+ / \sim$ là tập các số hữu tỉ và kí hiệu là $\mathbb{Q}$. Mỗi phần tử của tập $\mathbb{Q}$ ta gọi là một số hữu tỉ.

Giả sử $\alpha \in \mathbb{Q}$. Như vậy α được xác định một lớp tương đương có phần tử đại diện là $(r;s) \in \mathbb{Q}_+ \times \mathbb{Q}_+$, hay $\alpha = \overline{(r;s)} \in \mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+ \times \mathbb{Q}_+ / \sim$.

Ta dễ dàng chỉ ra rằng mỗi số hữu tỉ $\overline{(r;s)}$ được xác định một cách duy nhất bởi một phần tử đại diện thuộc một trong ba dạng sau: $\overline{(p,0)}$ hoặc $\overline{(0,p)}$ với $p \in \mathbb{Q}_+$ hoặc $\overline{(0,0)}$.

Để cho tiện ta quy ước:

- Nếu số hữu tỉ α được xác định bởi lớp tương đương dạng $\alpha = \overline{(r;0)}$ trong đó $r \neq 0$ thì ta sẽ viết α = + r hay α = r và gọi là số hữu tỉ dương

- Nếu số hữu tỉ α được xác định bởi lớp tương đương dạng $\alpha = \overline{(0;r)}$ trong đó $r \neq 0$ thì ta sẽ viết α = - r và gọi là số hữu tỉ âm.

- Nếu số hữu tỉ α được xác định bởi lớp tương đương dạng $\alpha = \overline{(0;0)}$ thì ta sẽ viết α = 0 và gọi là số hữu tỉ không hay số 0.

- Số - r gọi là số đối của r.

- Đặc biệt, ta viết $1 = \overline{(1;0)}$.

Như vậy, tập số hữu tỉ $\mathbb{Q}$ được phân tích thành ba tập rời nhau:

$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^{+} \cup \mathbb{Q}^{-} \cup \{0\}$, trong đó $\mathbb{Q}^{+}$ là tập các số hữu tỉ dương, $\mathbb{Q}^{-}$ là tập các số hữu tỉ âm.

3.7.3. Các phép toán trong tập số hữu tỉ

Giả sử α và β là hai số hữu tỉ, trong đó $\alpha = \overline{(r;s)}$ và $\beta = \overline{(r^{'};s^{'})}$. Ta định nghĩa:

a) Tổng của hai số hữu tỉ α và β là một số hữu tỉ γ, kí hiệu $\gamma = \alpha + \beta$, được xác định bởi quy tắc: $\gamma = \overline{(r + r^{'}; s + s^{'})}$.

Quy tắc cho tương ứng mỗi cặp số hữu tỉ α , β với một số hữu tỉ γ nói trên ta gọi là phép cộng các số hữu tỉ.

b) Tích của hai số hữu tỉ α và β là một số hữu tỉ δ, kí hiệu $\delta = \alpha\beta$, được xác định bởi quy tắc: $\delta = \overline{(rr^{'} + ss^{'}s; rs^{'} + r^{'}s)}$.

Quy tắc cho tương ứng mỗi cặp số hữu tỉ α , β với một số hữu tỉ δ nói trên ta gọi là phép nhân các số hữu tỉ.

c) Ta gọi hiệu của hai số hữu tỉ α và β là một số hữu tỉ ρ, kí hiệu $\rho = \alpha - \beta$, được xác định bởi quy tắc: $\rho = \alpha + (-\beta)$, trong đó $-\beta$ là số đối của β

Quy tắc cho tương ứng mỗi cặp số hữu tỉ α , β với một số hữu tỉ ρ nói trên ta gọi là phép trừ các số hữu tỉ.

d) Ta nói β là số hữu tỉ nghịch đảo của số hữu tỉ α, kí hiệu là $\beta = \alpha^{-1}$, nếu: $\alpha\beta = 1$.

Với hai số hữu tỉ α và β, trong đó $\beta \neq 0$, ta định nghĩa: thương của α chia cho β là số hữu tỉ ε, kí hiệu $\varepsilon = \alpha : \beta$ hay $\varepsilon = \dfrac{\alpha}{\beta}$, trong đó: $\varepsilon = \alpha\beta^{-1}$.

Quy tắc cho tương ứng mỗi cặp số hữu tỉ α , β ($\beta \neq 0$), với một số hữu tỉ ε nói trên ta gọi là phép chia các số hữu tỉ.

Ví dụ 3.15:

1. Cho $\alpha = \dfrac{3}{4}; \beta = \dfrac{1}{5}$. Tìm tổng, hiệu, tích, thương của α và β.

Ta có:

$$\alpha + \beta = \overline{\left(\frac{3}{4};0\right)} + \overline{\left(\frac{1}{5};0\right)} = \overline{\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{5};0\right)}$$

$$= \overline{\left(\frac{15+4}{20};0\right)} = \overline{\left(\frac{19}{20};0\right)} = \frac{19}{20}$$

$$\alpha - \beta = \overline{\left(\frac{3}{4};0\right)} + \overline{\left(0;\frac{1}{5}\right)}$$

$$= \overline{\left(\frac{3}{4};\frac{1}{5}\right)} = \overline{\left(\frac{11}{20};0\right)} = \frac{11}{20}$$

$$\alpha\beta = \overline{\left(\frac{3}{4};0\right)}.\overline{\left(\frac{1}{5};0\right)} = \overline{\left(\frac{3}{4}.\frac{1}{5};0\right)}$$

$$= \overline{\left(\frac{3}{20};0\right)} = \frac{3}{20}$$

$$\alpha : \beta = \alpha\beta^{-1} = \overline{\left(\frac{3}{4};0\right)}.\overline{\left(\frac{5}{1};0\right)}$$

$$= \overline{\left(\frac{3}{4}.\frac{5}{1};0\right)} = \overline{\left(\frac{15}{4};0\right)} = \frac{15}{4}.$$

2. Cho $\alpha = \frac{5}{2}; \beta = -\frac{11}{3}$. Tìm tổng, hiệu, tích, thương của α và β.

Ta có:

$$\alpha + \beta = \overline{\left(\frac{5}{2};0\right)} + \overline{\left(0;\frac{11}{3}\right)} = \overline{\left(\frac{5}{2};\frac{11}{3}\right)}$$

$$= \overline{\left(0;\frac{7}{6}\right)} = -\frac{7}{6}$$

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta) = \overline{\left(\frac{5}{2};0\right)} + \overline{\left(\frac{11}{3};0\right)}.$$

$$= \overline{\left(\frac{5}{2}+\frac{11}{3};0\right)} = \overline{\left(\frac{37}{6};0\right)} = \frac{37}{6}$$

$$\alpha\beta = \overline{\left(\frac{5}{2};0\right)}.\overline{\left(0;\frac{11}{3}\right)} = \overline{\left(0;\frac{5}{2}.\frac{11}{3}\right)} = \overline{\left(0;\frac{55}{6}\right)} = -\frac{55}{6}$$

$$\alpha : \beta = \alpha\beta^{-1} = \overline{\left(\frac{5}{2};0\right)}.\overline{\left(0;\frac{3}{11}\right)}$$

$$=\overline{\left(0;\frac{15}{22}\right)}=-\frac{15}{22}.$$

3. Cho $\alpha=-\frac{4}{7};\beta=-\frac{5}{3}$. Tìm tổng, hiệu, tích, thương của α và β.

Ta có:

$$\alpha+\beta=\overline{\left(0;\frac{4}{7}\right)}+\overline{\left(0;\frac{5}{3}\right)}=\overline{\left(0;\frac{4}{7}+\frac{5}{3}\right)}$$

$$=\overline{\left(0;\frac{47}{21}\right)}=-\frac{47}{21}$$

$$\alpha-\beta=\overline{\left(0;\frac{4}{7}\right)}+\overline{\left(\frac{5}{3};0\right)}=\overline{\left(\frac{5}{3};\frac{4}{7}\right)}$$

$$=\overline{\left(\frac{23}{21};0\right)}=\frac{23}{21}$$

$$\alpha\beta=\overline{\left(0;\frac{4}{7}\right)}.\overline{\left(0;\frac{5}{3}\right)}=\overline{\left(\frac{4}{7};0\right)}.\overline{\left(\frac{5}{3};0\right)}=\overline{\left(\frac{4}{7}.\frac{5}{3};0\right)}$$

$$=\overline{\left(\frac{20}{21};0\right)}=\frac{20}{21}$$

$$\alpha:\beta=\alpha\beta^{-1}=\overline{\left(0;\frac{4}{7}\right)}.\overline{\left(0;\frac{3}{5}\right)}$$

$$=\overline{\left(\frac{4}{7}.\frac{3}{5};0\right)}=\overline{\left(\frac{12}{35};0\right)}=\frac{12}{35}.$$

3.7.4. Quan hệ thứ tự trong tập số hữu tỉ

Cho $\alpha,\beta\in\mathbb{Q}$. Ta nói:

a) α nhỏ hơn β, kí hiệu là $\alpha<\beta$, nếu α - β là một số dương.

b) α nhỏ hơn hoặc bằng β, kí hiệu $\alpha\le\beta$, nếu $\alpha<\beta$ hoặc $\alpha=\beta$.

c) α lớn hơn β, kí hiệu $\alpha>\beta$, nếu $\beta<\alpha$.

d) α lớn hơn hoặc bằng β, kí hiệu $\alpha\ge\beta$, nếu $\beta\le\alpha$.

Các quan hệ $\alpha<\beta;\alpha\le\beta;\alpha>\beta;\alpha\ge\beta$ ta gọi chung là các bất đẳng thức, trong đó $\alpha>\beta$, nếu $\alpha<\beta$ ta gọi là các bất đẳng thức nghiêm ngặt hay bất đẳng thức chặt.

3.7.5. Xây dựng tập số nguyên trong $\mathbb{Q}$

Ta gọi số hữu tỉ xác định bởi lớp tương đương:

a) $\alpha = \overline{(n;0)}$, trong đó n là số tự nhiên khác 0 là một số nguyên dương, viết là $\alpha = n$.

b) Mỗi số hữu tỉ xác định bởi lớp tương đương: $\alpha = \overline{(0;n)}$, trong đó n là số tự nhiên khác 0 là một số nguyên âm, viết là $\alpha = -n$.

Các số nguyên dương, nguyên âm hoặc số 0 ta gọi chung là số nguyên.

Tập tất cả các số nguyên ta kí hiệu là $\mathbb{Z}$.

Như vậy: $\mathbb{Z} = \{n \in \mathbb{Q} | n \in \mathbb{N} \text{ hoặc } -n \in \mathbb{N}\}$.

3.7.6. Số thập phân trong $\mathbb{Q}$

Trong các phần trước chúng ta đã xây dựng tập số hữu tỉ không âm $\mathbb{Q}_{+10}$ (là tập con của $\mathbb{Q}_+$). Như vậy, mỗi số thập phân không âm r cũng là một số hữu tỉ, ta có $r \in \mathbb{Q}$ hay $\mathbb{Q}_{+10} \subset \mathbb{Q}$.

Số hữu tỉ α gọi là số thập phân, nếu $\alpha \in \mathbb{Q}_{+10}$ hoặc $-\alpha \in \mathbb{Q}_{+10}$. Tập tất cả các số thập phân ta kí hiệu là $\mathbb{Q}_{10}$.

Chẳng hạn: 4,017 và – 4,017 là các số thập phân.

3.8. TẬP SỐ THỰC

3.8.1. Sự cần thiết phải xây dựng tập số thực

Ta xét bài toán: “Cho hình vuông có cạnh bằng một đơn vị độ dài. Tìm số đo của đường chéo hình vuông đó”.

Ta giả sử đường chéo d của hình vuông đó có số đo là một số hữu tỉ $\frac{p}{q}$, với ƯCLN(p, q) = 1. Áp dụng định lí Pitago ta có: $\frac{p^2}{q^2} = 1^2 + 1^2 = 2$ hay $p^2 = 2q^2$. Suy ra p^2 là số chẵn, vậy p phải là số chẵn, hay p = 2k. Thay vào ta được $4k^2 = 2q^2$ hay $q^2 = 2k^2$. Lập luận như trên ta suy ra q là số chẵn. Điều này trái với giả thiết ƯCLN(p, q) = 1.

Vậy số đo đường chéo của hình vuông đã cho không thể là số hữu tỉ.

Tương tự, nếu dừng lại ở tập số hữu tỉ thì các phương trình:

$$x^2 - 3 = 0\,; \qquad x^2 - 5 = 0\,; \ldots$$

đều không có nghiệm.

Trong khi đó, trong toán học và khoa học kỹ thuật ta thường xuyên phải biểu diễn số đo của những đoạn thẳng, hoặc tìm nghiệm của những phương trình trên đây. Vì vậy cần phải mở rộng tập số hữu tỉ thêm những số mới để đáp ứng nhu cầu phát triển của toán học và các ngành khoa học khác.

3.8.2. Xây dựng tập số thực

Có nhiều cách xây dựng tập số thực, chẳng hạn: xây dựng từ số thập phân vô hạn, phương pháp nhát cắt Dedekin, phương pháp là đầy,…Dưới đây ta trình bày cách xây dựng tương đối đơn giản: mở rộng tập số thập phân để được tập số thực.

Trong các phần trước, chúng ta đã xét hai loại số thập phân: số thập phân (có hữu hạn số chữ số ở phần thập phân) và số thập phân vô hạn tuần hoàn.

Ngoài hai loại số thập phân nói trên, ta còn gặp một loại số thập phân có vô số chữ số ở phần thập phân, các chữ số ở phần thập phân không lặp đi lặp lại theo bất kỳ một chu kỳ nào. Chẳng hạn: 1,4142135…; 1,7320508…; 3,141659265…

Những số thập phân như thế gọi là số thập phân vô hạn không tuần hoàn. Mỗi số thập phân vô hạn không tuần hoàn gọi là một số vô tỉ. Tập hợp tất cả các số vô tỉ ta kí hiệu là I.

Tập tất cả các số hữu tỉ và các số vô tỉ ta gọi là tập số thực, kí hiệu là $\mathbb{R}$.

Như vậy: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup I$.

Chẳng hạn:

+) 0,712; - 4,008; 13,9 là các số thập phân.

+) 3,9(54); - 2,(18);… là các số thập phân vô hạn tuần hoàn

+) 0,4142135…; hoặc – 2,6457513….. là các số thập phân không tuận hoàn (hay còn gọi là số vô tỉ).

+) Mỗi số 0,72; - 4008; 13,9; 3,9(54); - 2,(18); 0,4142135…; - 2,6457513… là một số thực.

3.8.3. Các phép toán trong tập số thực

Nếu ta coi mỗi số thập phân hữu hạn là một số thập phân vô hạn tuần hoàn có chu kỳ bằng 0 thì ta có thể nói mỗi số thực là một số thập phân vô hạn (tuần hoàn hoặc không).

Như vậy mỗi số thực có dạng:

$$x = a, a_1 a_2 a_3 \ldots a_i \ldots$$

Trong đó a là số nguyên dương còn a_i với i = 1, 2, 3,… là một trong các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 và các số được kí hiệu như trên với dấu trừ phía trước: $x = -a, a_1 a_2 a_3 \ldots a_i \ldots$

Số thực x khác 0 mà dạng thập phân vô hạn của nó không mang dấu trừ gọi là số thực dương, trong trường hợp ngược lại gọi là số thực âm.

Số thực y gọi là số đối của số thực x, kí hiệu là y = - x, nếu ở dạng thập phân vô hạn x và y chỉ khác nhau về dấu.

Giả sử x và y là hai số thực, trong đó:

$x = a, a_1 a_2 a_3 \ldots a_k \ldots$ và $y = b, b_1 b_2 b_3 \ldots b_k \ldots$, trong đó a, b là hai số nguyên và $a_k; b_k \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, 9\}$.

Ta gọi:

a) Tổng gần đúng cấp k của x và y là số:

s = $a, a_1 a_2 a_3 \ldots a_k \ldots + \ b, b_1 b_2 b_3 \ldots b_k \ldots$

b) Hiệu gần đúng cấp k của x và y là số:

u = $a, a_1 a_2 a_3 \ldots a_k \ldots$ - $b, b_1 b_2 b_3 \ldots b_k \ldots$

c) Tích gần đúng cấp k của x và y là số:

p = $a, a_1 a_2 a_3 \ldots a_k \ldots$ x $b, b_1 b_2 b_3 \ldots b_k \ldots$

lấy gần đúng đến k chữ số thập phân

d) Thương gần đúng cấp k của x và y là số:

d = $a, a_1 a_2 a_3 \ldots a_k \ldots$: $b, b_1 b_2 b_3 \ldots b_k \ldots$

lấy gần đúng đến k chữ số thập phân

Ví dụ 3.16:

1. Cho x = 2,47 và y = 11,3. Tìm tổng, hiệu, tích và thương gần đúng cấp hai của x và y:

Ta có:

x + y = 2,47 + 11,3 = 13,77.

x - y = 2,47 - 11,3 = - 8,83.

x × y = 2,47 × 11,3 = $27,911 \approx 27,91$

$$x : y = 2,47 : 11,3 = 0,218584 \approx 0,22.$$

2. Cho x = 0,9545454…….. và y = - 7,2. Tìm tổng, hiệu, tích và thương gần đúng cấp 3 của x và y:

Ta có:

$$x + y \approx 0,954 - 7,200 = -6,246.$$

$$x - y \approx 0,954 + 7,200 = 8,154.$$

$$x \times y \approx 0,954 \times 7,200 \approx -6,8688 \approx -6,869.$$

$$x : y \approx 0,954 : (-7,200) = -0,1325 \approx -0,133.$$

3. Cho $x = -\sqrt{2}$ và y = 1,603. Tìm tổng, hiệu, tích và thương gần đúng cấp 1 của x và y:

Ta có: $-\sqrt{2} = -1,4142135$........

$x + y \approx -1,4 + 1,6 = 0,2.$

$$x - y \approx -1,4 - 1,6 = -3.$$

$$x \times y \approx -1,4 \times 1,6 = -2,24 \approx -2,2.$$

$$x : y \approx -1,4 : 1,6 = -0,875 \simeq -0,9.$$

4. Cho $x = -\sqrt{3}$ và $x = -\sqrt{5}$. Tìm tổng, hiệu, tích và thương gần đúng cấp 3 của x và y:

Ta có: $-\sqrt{3} = -1,7320508$........ và $-\sqrt{5} = -2,2360679$........

$x + y \approx -1,732 - 2,2366 = -3,968$

$x - y \approx -1,732 + 2,2366 = 0,504$

$x \times y \approx (-1,732) \times (-2,2366) = 3,872752 \approx 3,873.$

$x : y \approx (-1,732) : (-2,2366) = 0,7745974 \approx 0,775.$

Bài tập chương 3

1. Cho năm chữ số 0, 4, 5, 6, 9. Hãy viết các số thập phân nhỏ hơn 50 sao cho mỗi chữ số đã cho xuất hiện trong cách viết đúng một lần.

2. Khi lùi dấu phẩy của một số thập phân từ phải qua trái một hàng thì số đó giảm đi 11,07 đơn vị. Tìm số thập phân đó.

3. Khi bỏ quên dấu phẩy của một số thập phân có hai chữ số ở phần thập phân thì số đó tăng lên 537,57 đơn vị. Tìm số thập phân đó.

4. Tính giá trị của biểu thức sau bằng cách hợp lí:

a) $\dfrac{250\times 1,80+25\times 12,8+292\times 2,5}{1+5+9+......+97+225}$.

b) $\dfrac{20,2\times 5,1-30,3\times 3,4+14,58}{7,29\times 540\times 2+14,58\times 460}$.

5. Thay mỗi chữ trong phép tính sau bởi chữ số thích hợp:

a) $\overline{8ab},a-\overline{d41},c=\overline{c14},d$.

b) $4,896-\overline{a},bab=\overline{0},0ab$.

6.

a) Có một bình đựng 80g nước muối loại 8%. Phải đổ thêm vào bình đó bao nhiêu gam nước để được một bình nước chứa 20% muối?

b) Có một bình đựng 150g nước loại 10% muối. Phải đổ thêm vào bình đó bao nhiêu gam muối để được một bình nước chứa 20% muối?

7. Tìm tổng, hiệu, tích, thương của α và β, biết rằng:

a) $\alpha=\dfrac{5}{6}$ và $\beta=\dfrac{3}{8}$.

b) $\alpha=\dfrac{4}{7}$ và $\beta=-\dfrac{5}{3}$.

c) $\alpha=-\dfrac{5}{8}$ và $\beta=\dfrac{3}{7}$.

d) $\alpha=-\dfrac{9}{5}$ và $\beta=-\dfrac{7}{10}$.

8. Viết các số thập phân sau dưới dạng thu gọn:

a) $\alpha=-\dfrac{3}{4}$; b) $\beta=-\dfrac{15}{4}$; c) $\gamma=-\dfrac{127}{40}$.

9. Viết các số thập phân sau dưới dạng số hữu tỉ:

a) $\alpha=-4,08$; b) $\beta=-6,09$; c) $\gamma=-13,15$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Phan Hữu Chân – Nguyễn Tiến Tài (1996). *Số học và lôgic toán,* NXB Giáo dục.

[2]. Trần Diên Hiển – Bùi Huy Hiền (2007). *Các tập hợp số*. Tài liệu đào tạo giáo viên, NXB Giáo dục và NXB Đại học Sư phạm.

[3]. Trần Diên Hiển – Nguyễn Xuân Liêm (2007). *Cơ sở lí thuyết tập hợp và lôgic toán*. Tài liệu đào tạo giáo viên, NXB Giáo dục và NXB Đại học Sư phạm.

[4]. Trần Diên Hiển – Nguyễn Tiến Tài – Nguyễn Văn Ngọc (2003). *Giáo trình lí thuyết số*, NXB – ĐHSP.

[5]. Đỗ Đình Hoan và tập thể tác giả. *Toán 1, 2, 3, 4, 5*. NXB Giáo dục (2003).

MỤC LỤC