

UBND TỈNH QUẢNG NGÃI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC PHẠM VĂN ĐỒNG



TRƯỜNG ĐẠI HỌC PHẠM VĂN ĐỒNG
PVDU
PHAM VAN DONG UNIVERSITY

BÀI GIẢNG
QUY HOẠCH
TUYỂN TÍNH

Biên soạn : ThS. PHAN BÁ TRÌNH

Quảng Ngãi, Tháng 5 - 2014

LỜI NÓI ĐẦU

Quy hoạch tuyến tính là lĩnh vực toán học nghiên cứu các bài toán tối ưu trên hữu hạn biến mà hàm mục tiêu và các ràng buộc đều là hàm số và các phương trình hoặc bất phương trình tuyến tính.

Khi Dantzig công bố phương pháp đơn hình để giải các bài toán lập kế hoạch cho không quân Mỹ năm 1947 là xuất phát từ yêu cầu về quản lý và cũng từ đó các dạng bài toán khác nhau đều tìm cách đưa về quy hoạch tuyến tính và dùng phương pháp đơn hình để giải. Người ta cũng dùng quy hoạch tuyến tính để phân tích các mô hình lý thuyết kinh tế cổ điển của Walras được đề xuất từ năm 1874 một cách hoàn chỉnh.

Các nhà toán học như Kantorovich và Koopmans là những nhà toán học có nhiều công trình nghiên cứu và ứng dụng quy hoạch tuyến tính thành công nhất trong lĩnh vực kinh tế mà chúng ta thường gọi là toán kinh tế. Năm 1975, Kantorovich và Koopmans được giải thưởng Nobel về khoa học kinh tế.

Quy hoạch tuyến tính là môn học bắt buộc đối với các trường thuộc khối ngành khoa học tự nhiên, kinh tế, sư phạm...

Bài giảng Quy hoạch tuyến tính dành cho sinh viên các lớp thuộc ngành sư phạm Toán, ngành kinh tế,...

Nội dung “ Bài giảng Quy hoạch tuyến tính” gồm 5 chương:

Chương 1. Bài toán quy hoạch tuyến tính

Chương 2. Tính chất của tập phương án và tập phương án tối ưu của bài toán quy hoạch tuyến tính

Chương 3. Phương pháp đơn hình và các thuật toán của nó

Chương 4. Bài toán đối ngẫu, thuật toán đơn hình đối ngẫu

Chương 5. Bài toán vận tải, thuật toán thế vị

Bài giảng đã trình bày những nội dung căn bản nhất của quy hoạch tuyến tính như cấu trúc đa dạng của bài toán và cách chuyển đổi sang cấu trúc chính tắc, chuẩn tắc của bài toán quy hoạch tuyến tính, cấu trúc bài toán đối ngẫu, các phương pháp giải

bài toán quy hoạch tuyến tính...Đặc biệt, sau mỗi chương có phần bài tập rất phong phú để củng cố kiến thức và rèn luyện kỹ năng tính toán.

Bài giảng đã giới thiệu các ví dụ minh họa, những bài toán ứng dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau sẽ giúp ích cho các bạn sinh viên các nhà quản lý, các nhà kinh tế...

Chúng tôi hy vọng rằng “Bài giảng Quy hoạch tuyến tính” là một tài liệu học tập bổ ích cho sinh viên và là nguồn tư liệu phong phú cho quý Thầy, Cô giáo tham khảo, nghiên cứu.

Là lần viết đầu tiên, nên chắc chắn bài giảng còn nhiều thiếu sót. Chúng tôi hết sức chân thành cảm ơn sự góp ý, nhận xét của bạn đọc về nhiều phương diện để bài giảng ngày càng được tốt hơn.

Mọi góp ý xin gửi về:

Phan Bá Trình, Khoa Cơ bản - Trường Đại học Phạm Văn Đồng.

Email: pbtrinh@pdu.edu.vn

Chương 1. BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

1.1. Một vài bài toán thực tế

1.1.1. Xây dựng mô hình toán học cho một số vấn đề thực tế

Các bước thực hiện để lập mô hình toán học cho vấn đề thực tế

Bước 1. Tìm kiếm thông tin gốc

Đây là quá trình thu thập các số liệu kinh tế - kỹ thuật. Bước này khá quan trọng vì tất cả các bước sau dựa vào các số liệu này để tính toán. Nó quyết định tính chính xác của kết quả thu được. Mỗi bài toán kinh tế cụ thể đòi hỏi các thông tin gốc khác nhau.

Bước 2. Xử lý số liệu

Bước này có thể chia thành hai giai đoạn

i) Lập mô hình bài toán

Từ những số liệu và các yêu cầu về kinh tế - kỹ thuật, ta chuyển thành mô hình toán học. Đòi hỏi ở bước này là phải thiết lập chính xác và đầy đủ các điều kiện của bài toán.

ii) Lựa chọn thuật toán thích hợp và giải bài toán

Đây là quá trình tính toán trên mô hình toán dựa vào các thành tựu và toán học đã có.

Kết quả ở bước này chính là lời giải cơ bản để đưa ra giải pháp tối ưu về mặt kinh tế. Vì vậy đây là bước quan trọng.

Bước 3. Thông tin kết quả

Thực chất của bước này là sự diễn giải các thông tin về mặt toán học thành các thông tin về mặt kinh tế. Nghĩa là, dựa vào các kết quả tính toán đã có để những nhà làm chính sách đưa ra các quyết định kinh tế.

1.1.2. Một vài bài toán thực tế

1.1.2.1. Bài toán lập kế hoạch sản xuất

Bài toán tổng quát:

Trong một chu kỳ sản xuất một doanh nghiệp sử dụng m loại nhân tố sản xuất khác nhau để sản xuất ra n loại sản phẩm khác nhau E_1, E_2, \dots, E_n .

Hãy lập kế hoạch sản xuất cho mỗi tháng để thỏa mãn yêu cầu thị trường, không bị động về đội ngũ, doanh thu đem về cho công ty lớn nhất.

Giải:

Gọi x_1, x_2 lần lượt là số lượng phân mềm A và B cần sản xuất.

Theo đề bài ta có mô hình toán học:

Tìm $x = (x_1, x_2)$:

$$f(x) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max \text{ (Đơn vị tính: 1.000USD) } \quad (1)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 + 3x_2 \leq 8 \end{cases} \quad (2)$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \quad (3)$$

1.1.2.2. Bài toán vận tải

Bài toán:

Ta cần vận chuyển một loại mặt hàng nào đó (Chẳng hạn: máy tính, linh kiện điện tử, gạo, gỗ, xi măng, xăng dầu,...) gồm có m trạm phát hàng A_1, A_2, \dots, A_m với lượng hàng yêu cầu phát đi tương ứng là a_1, a_2, \dots, a_m đơn vị hàng, n trạm thu hàng B_1, B_2, \dots, B_n với lượng hàng yêu cầu chuyển đến tương ứng là b_1, b_2, \dots, b_n đơn vị hàng và ma trận cước phí vận chuyển (Chi phí vận chuyển một đơn vị hàng)

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix} \text{ viết gọn là: } C = (c_{ij})_{m,n}.$$

Ở đây c_{ij} ($\forall (i, j): i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$): là cước phí vận chuyển cho mỗi đơn vị hàng hóa được chuyển từ trạm phát A_i đến trạm thu B_j .

Bài toán đặt ra với điều kiện

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \quad (*)$$

(*) gọi là điều kiện cân bằng thu phát tức là: Tổng lượng hàng phát đáp ứng đầy đủ cho tổng lượng hàng thu (cung bằng cầu). Hãy lập kế hoạch vận chuyển hàng sao cho:

- Các trạm phát (cung) hết lượng hàng hiện có.

- Các trạm thu (cầu) nhận đủ lượng hàng yêu cầu.
- Tổng chi phí vận chuyển nhỏ nhất.

Phân tích:

Gọi x_{ij} ($\forall (i, j): i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$): là lượng hàng vận chuyển từ A_i đến B_j

Thấy rằng $x_{ij} \geq 0$; ($\forall (i, j): i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$) trong đó $x_{ij} > 0$ khi A_i phát hàng cho B_j ; còn $x_{ij} = 0$ khi A_i không phát hàng cho B_j . Khi đó mô hình của bài toán nói trên là: Tìm một ma trận phân phối và vận chuyển hàng:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix} \text{ viết gọn } X = (x_{ij})_{m,n}.$$

thỏa mãn các điều kiện sau:

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min (\text{tổng chi phí vận chuyển bé nhất}) \quad (1)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i (\text{tổng lượng hàng phát đi từ trạm } A_i) (\forall i: i = \overline{1, m}); \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j (\text{tổng lượng hàng chuyển đến trạm } B_j) (\forall j: j = \overline{1, n}). \end{cases} \quad (2)$$

$$x_{ij} \geq 0; (\forall (i, j): i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}) \quad (3)$$

Ví dụ 2:

Ta cần vận chuyển máy tính từ 2 công ty (trạm phát): P_1, P_2 đến 3 nơi tiêu thụ (trạm thu) T_1, T_2 và T_3 . Số lượng máy tính ở mỗi công ty cần chuyển, nhu cầu máy tính tại các nơi tiêu thụ cũng như cước phí vận chuyển cho mỗi máy tính được chuyển từ công ty P_i đến nơi tiêu thụ T_j ($\forall (i, j): i = \overline{1, 2}; j = \overline{1, 3}$) được cho trong bảng sau:

Cước phí \ Trạm thu	$T_1: 15$ (máy)	$T_2: 20$ (máy)	$T_3: 25$ (máy)
Công ty			
$P_1: 20$ (máy)	5 (nghìn đồng)	7 (nghìn đồng)	2 (nghìn đồng)
$P_2: 40$ (máy)	4 (nghìn đồng)	4 (nghìn đồng)	6 (nghìn đồng)

Hãy lập kế hoạch vận chuyển như thế nào để:

- Các công ty phải phân phối hết số máy tính hiện có.
- Các nơi tiêu thụ nhận đủ số máy theo nhu cầu.
- Tổng cước phí vận chuyển là thấp nhất.

Giải:

Gọi x_{ij} là số máy tính sẽ vận chuyển từ công ty (P_i) đến nơi tiêu thụ (T_j)

$$(\forall (i, j) : i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$$

Với điều kiện: $x_{ij} \geq 0$ ($\forall (i, j) : i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$).

Số máy tính vận chuyển từ P_1 đến 3 nơi tiêu thụ là:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13}$$

Số máy tính vận chuyển từ P_2 đến 3 nơi tiêu thụ là:

$$x_{21} + x_{22} + x_{23}$$

Số máy tính vận chuyển đến tiêu thụ T_1 từ 2 công ty là:

$$x_{11} + x_{21}$$

Tổng số máy tính vận chuyển đến tiêu thụ T_2 từ 2 công ty là:

$$x_{12} + x_{22}$$

Tổng số máy tính vận chuyển đến tiêu thụ T_3 từ 2 công ty là:

$$x_{13} + x_{23}$$

Tổng cước phí phải chi trả là: (Tổng này càng nhỏ càng tốt)

$$5x_{11} + 7x_{12} + 2x_{13} + 4x_{21} + 3x_{22} + 6x_{23}$$

Theo đề bài ta có mô hình toán học của bài toán là:

Tìm $x = (x_{ij})$ ($\forall (i, j) : i = \overline{1, 2}; j = \overline{1, 3}$) thỏa mãn:

$$f(x) = 5x_{11} + 7x_{12} + 2x_{13} + 4x_{21} + 3x_{22} + 6x_{23} \rightarrow \min \quad (1)$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} & = 20 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} & = 40 \\ x_{11} + x_{21} & = 15 \\ x_{12} + x_{22} & = 20 \\ x_{13} + x_{23} & = 25 \end{cases} \quad (2)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (\forall i, j : i = \overline{1, 2}; j = \overline{1, 3}). \quad (3)$$

$$\text{Ma trận hệ số } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \\ 15 \\ 20 \\ 25 \end{pmatrix};$$

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix}$$

Ở đây thay vì viết $x = (x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23})$ ta viết thành ma trận như trên để mỗi hàng ứng với một trạm phát và mỗi cột ứng với một trạm thu cho dễ hình dung.

1.1.2.3. Bài toán khẩu phần thức ăn

Bài toán:

Giả sử ta đã biết được nhu cầu tối thiểu hàng ngày về các chất dinh dưỡng (đường, đạm, béo, khoáng...) cần cho một loại đối tượng nào đó (trẻ con, người lớn, heo, gà,...).

Để cung cấp các chất dinh dưỡng này hiện có một số thức ăn có thể mua được trên thị trường và cũng biết tỉ lệ các chất dinh dưỡng trong mỗi loại thức ăn cũng như giá cả của chúng.

Vấn đề đặt ra là cần xác định số lượng thức ăn mỗi loại trong khẩu phần thức ăn hàng ngày sao cho vừa đảm bảo cung cấp đủ chất dinh dưỡng đồng thời giá thành là rẻ nhất.

Bài toán khẩu phần thức ăn là một bài toán cụ thể nhưng mô hình của nó có thể dùng cho các bài toán khác.

Thực chất đây là bài toán hỗn hợp nhiều thành phần để đạt được yêu cầu nào đó về chất lượng sản phẩm, đồng thời có giá thành rẻ nhất.

Có thể áp dụng mô hình này cho các ngành như luyện kim, hoá chất,...

Phân tích:

Ký hiệu: n là số loại thức ăn.

m là số loại dinh dưỡng cần cho khẩu phần.

a_{ij} là hàm lượng chất dinh dưỡng i có trong một đơn vị thức ăn j

$$(\forall (i, j): i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}).$$

b_i là số đơn vị chất dinh dưỡng i cần cho 1 khẩu phần thức ăn

$$(\forall i: i = \overline{1, m})$$

Mỗi đơn vị thức ăn loại I; II; III lần lượt có giá trị tương ứng là: 0,8; 1,5 và 3,0 đơn vị tiền.

Yêu cầu tối thiểu của chất đạm là 20 đơn vị, của chất béo là 10 đơn vị và của Albumin là 15 đơn vị.

Xác định số liệu để ghi vào bảng trên là công việc của các nhà kinh tế, chuyên môn, không thuộc phạm vi quy hoạch tuyến tính.

Nhiệm vụ đặt ra là: cần xác định số liệu thức ăn mỗi loại sao cho đảm bảo yêu cầu về dinh dưỡng, đồng thời giá thành khẩu phần thức ăn là nhỏ nhất.

Ta cần thành lập mô hình của bài toán này:

Gọi x_1, x_2, x_3 lần lượt là số lượng thức ăn loại I, II, III cần mua. Đây là những số cần tìm.

Hàm mục tiêu sẽ là:

$$f(x) = 0,8x_1 + 1,5x_2 + 3x_3 \rightarrow \min \quad (1)$$

Hệ ràng buộc là:

$$\begin{cases} 0,5x_1 + 10x_2 + 0,4x_3 \geq 20 \\ 3x_1 + 0,5x_2 + 0,7x_3 \geq 10 \\ 0,3x_1 + 0,8x_2 + 2x_3 \geq 15 \end{cases} \quad (2)$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \quad x_3 \geq 0. \quad (3)$$

Điều kiện (3) có được là vì số lượng thức ăn không thể âm.

Nhiệm vụ của bài toán là tìm bộ giá trị (x_1, x_2, x_3) thỏa mãn các ràng buộc (2), (3) và sao cho hàm mục tiêu $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Nhận định chung:

Qua các ví dụ được trình bày ở phần trên, ta thấy rằng trong nhiều lĩnh vực khác nhau có những yêu cầu khác nhau trong việc đề ra các quyết định định lượng nhằm tối ưu hóa sản xuất. Nhưng những yêu cầu này có thể được diễn giải thành mô hình toán học và tổng quát hóa như sau:

(1) Điều kiện tối ưu hóa: Đòi hỏi thỏa mãn yêu cầu về mặt kinh tế bao gồm 2 trường hợp cực đại hóa hoặc cực tiểu hóa.

Trong đó các a_{ij} , b_j và các c_j đều đã biết, còn x_j ($\forall j: j = \overline{1, n}$) là các ẩn số ($\forall (i, j): i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$).

1.2. Các dạng bài toán quy hoạch tuyến tính

1.2.1. Bài toán quy hoạch tuyến tính tổng quát

Bài toán quy hoạch tuyến tính tổng quát được định nghĩa như sau:

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \min / (\max) \quad (1)$$

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \quad [\geq | = | \leq] b_i \\ (\forall i: i = \overline{1, m}) \end{cases} \quad (2)$$

$$x_j \quad [\geq | \leq] 0 \quad \text{hoặc tùy ý} \quad (\forall j: j = \overline{1, n}) \quad (3)$$

(Ký hiệu: $[\geq | = | \leq]$ nghĩa là lấy một trong 3 dấu trong ngoặc;

$[\geq | \leq]$ nghĩa là lấy một trong 2 dấu trong ngoặc).

- Hàm f gọi là hàm mục tiêu của bài toán

- Phương án của bài toán là vector $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ thoả mãn ràng buộc (2) và

(3). Ký hiệu S là tập tất cả các phương án của bài toán.

- Phương án tối ưu của bài toán là $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ làm cho hàm mục tiêu f đạt giá trị nhỏ nhất đối với bài toán min và lớn nhất đối với bài toán max, tức là phương án thoả mãn điều kiện (1). Ký hiệu S^* là tập tất cả các phương án tối ưu của bài toán.

- Trị tối ưu của bài toán là: $f(x)^* = c_1x_1^* + c_2x_2^* + \dots + c_nx_n^*$

trong đó $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ là phương án tối ưu.

- Hai bài toán quy hoạch tuyến tính gọi là tương đương nếu chúng có cùng tập phương án và tập phương án tối ưu.

Ghi chú:

i) Bài toán max: $f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max$ (1) với điều kiện (2) và (3) tương đương với bài toán min sau: $g(x) = -c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_nx_n \rightarrow \min$ (1) với điều kiện (2) và (3) và trị tối ưu: $f^*(x) = -g^*(x)$.

Như vậy chỉ cần phát biểu thuật toán giải bài toán min là đủ.

ii) Với những biến x_j có điều kiện $x_j \leq 0$, ta thay bằng biến $x'_j = -x_j$ có điều kiện tương đương $x'_j \geq 0$.

Với những biến x_j không có ràng buộc về dấu ta đặt $x_j = x'_j - x''_j$ trong đó $x'_j \geq 0$ và $x''_j \geq 0$.

Như vậy hệ điều kiện về dấu (3) có thể quy về trường hợp $x_j \geq 0$ ($\forall j: j = \overline{1, n}$).

iii) Trong hệ ràng buộc (2), những ràng buộc dạng:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$$

tương đương với ràng buộc:

$$-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \dots - a_{in}x_n \geq -b_i$$

Như vậy mọi ràng buộc ở hệ (2) dạng \leq có thể quy về dạng \geq và ngược lại.

iv) Trong hệ ràng buộc (2), những ràng buộc dạng:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i$$

tương đương với hệ ràng buộc:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n - z_i = b_i$$

trong đó z_i là biến phụ ($z_i \geq 0$).

Trong hệ ràng buộc (2), những ràng buộc dạng:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$$

tương đương với hệ ràng buộc:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + z_i = b_i$$

trong đó z_i là biến phụ ($z_i \geq 0$).

v) Ngược lại ràng buộc dạng:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$$

tương đương với 2 ràng buộc:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i$$

và

$$-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \dots - a_{in}x_n \geq -b_i.$$

Như vậy mọi ràng buộc ở hệ (2) dạng \geq có thể quy về dạng $=$ và ngược lại.

BẢNG TÓM TẮT

TT	Các trường hợp	Tương đương
1	$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max$	$g = -f = -c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_nx_n \rightarrow \min$
2	$x_j \leq 0$	$x'_j = -x_j; \quad x'_j \geq 0$
	x_j không có ràng buộc về dấu	$x_j = x'_j - x''_j; \quad x'_j \geq 0; \quad x''_j \geq 0$
3	$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$	$-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \dots - a_{in}x_n \geq -b_i$
4	$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i$	$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n - z_i = b_i$ z_i : biến phụ ($z_i \geq 0$).
	$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$	$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + z_i = b_i$ z_i : biến phụ ($z_i \geq 0$).
5	$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$	$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i$ và $-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \dots - a_{in}x_n \geq -b_i$

1.2.2. Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn tắc

Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn tắc được định nghĩa như sau:

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \min \quad (1)$$

với điều kiện

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i \\ (\forall i : i = \overline{1, m}) \end{cases} \quad (2)$$

$$x_j \geq 0; \quad (\forall j : j = \overline{1, n}) \quad (3)$$

hoặc

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max \quad (1)$$

với điều kiện

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i \\ (\forall i : i = \overline{1, m}) \end{cases} \quad (2)$$

$$x_j \geq 0; \quad (\forall j : j = \overline{1, n}) \quad (3)$$

Rõ ràng bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn tắc là trường hợp riêng của bài toán tổng quát. Từ các ghi chú trên ta dễ dàng suy ra:

Mệnh đề 1. Mọi bài toán quy hoạch tuyến tính tổng quát đều có thể đưa về dạng bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn tắc tương đương.

1.2.3. Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc

Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc được định nghĩa như sau:

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \min/(\max) \quad (1)$$

với điều kiện

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ (\forall i : i = \overline{1, m}) \end{cases} \quad (2)$$

$$x_j \geq 0 ; (\forall j : j = \overline{1, n}) \quad (3)$$

Rõ ràng bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc là trường hợp riêng của bài toán tổng quát. Từ các ghi chú trên ta dễ dàng suy ra:

Mệnh đề 2. Mọi bài toán quy hoạch tuyến tính tổng quát đều có thể đưa về dạng bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc tương đương.

Ví dụ:

Cho bài toán quy hoạch tuyến tính (P)

$$f(x) = -3x_1 + 2x_2 - x_3 \rightarrow \max \quad (1)$$

Hệ ràng buộc là:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \quad (2)$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \leq 0. \quad (3)$$

Hãy chuyển bài toán (P) về bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn (P') và dạng chính tắc min(P'').

Giải:

i. Ta chuyển bài toán (P) về bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn (P').

- Biến x_2 thay bằng biến x'_2 sao cho $x'_2 = -x_2$ với điều kiện $x'_2 \geq 0$.

- Biến x_3 thay bằng biến x'_3 và x''_3 sao cho $x_3 = x'_3 - x''_3$ với điều kiện $x'_3 \geq 0$; $x''_3 \geq 0$.

Hàm mục tiêu f chuyển thành

$$g(x) = -f(x) = 3x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$= 3x_1 + 2x_2' + x_3' - x_3'' \rightarrow \min \quad (1')$$

- Ràng buộc thứ nhất chuyển thành

$$2x_1 - 3x_2' + x_3' - x_3'' \geq 2$$

- Ràng buộc thứ 2 chuyển thành

$$-x_1 + x_2' - x_3' + x_3'' \geq -1$$

- Ràng buộc thứ 3 chuyển thành

$$x_1 - 4x_2' + x_3' - x_3'' \geq 1$$

$$\text{và } -x_1 + 4x_2' - x_3' + x_3'' \geq -1.$$

Cuối cùng bài toán chuẩn (P') có dạng:

$$g(x) = 3x_1 + 2x_2' + x_3' - x_3'' \rightarrow \min \quad (1')$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2' + x_3' - x_3'' \geq 2 \\ -x_1 + x_2' - x_3' + x_3'' \geq -1 \\ x_1 - 4x_2' + x_3' - x_3'' \geq 1 \\ -x_1 + 4x_2' - x_3' + x_3'' \geq -1 \end{cases} \quad (2')$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2' \geq 0; \quad x_3' \geq 0; \quad x_3'' \geq 0 \quad (3')$$

ii. Ta chuyển bài toán (P) về bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc min(P'').

- Biến x_2 thay bằng biến x_2' sao cho $x_2 = -x_2'$ với điều kiện $x_2' \geq 0$.

- Biến x_3 thay bằng biến x_3' và x_3'' sao cho $x_3 = x_3' - x_3''$ với điều kiện $x_3' \geq 0; x_3'' \geq 0$.

Hàm mục tiêu f(x) chuyển thành

$$g(x) = -f(x) = 3x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$= 3x_1 + 2x_2' + x_3' - x_3'' \rightarrow \min \quad (1'')$$

- Ràng buộc thứ nhất chuyển thành: $2x_1 - 3x_2' + x_3' - x_3'' - z_1 = 2$

trong đó z_1 là biến phụ, $z_1 \geq 0$.

- Ràng buộc thứ 2 chuyển thành: $x_1 - x_2' + x_3' - x_3'' + z_2 = 1$

trong đó z_2 là biến phụ, $z_2 \geq 0$.

- Ràng buộc thứ 3 chuyển thành: $x_1 - 4x_2' + x_3' - x_3'' = 1$

Cuối cùng bài toán chuẩn (P'') có dạng:

$$g(x) = 3x_1 + 2x_2' + x_3' - x_3'' \rightarrow \min \quad (1'')$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2' + x_3' - x_3'' - z_1 = 2 \\ x_1 - x_2' + x_3' - x_3'' + z_2 = 1 \\ x_1 - 4x_2' + x_3' - x_3'' = 1 \end{cases} \quad (2'')$$

$$x_1 \geq 0; x_2' \geq 0; x_3' \geq 0; x_3'' \geq 0; z_1 \geq 0; z_2 \geq 0 \quad (3'')$$

1.3. Phương pháp hình học giải bài toán quy hoạch tuyến tính hai biến

1.3.1. Nội dung phương pháp

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính dưới dạng chuẩn với hai biến số:

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \min/(\max) \quad (1)$$

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i \\ (\forall i: i = \overline{1,2}) \end{cases} \quad (2)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \quad (3)$$

Từ ý nghĩa hình học ta biết rằng mỗi bất phương trình:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i \text{ xác định một nửa mặt phẳng.}$$

Như vậy miền D (miền chấp nhận) được xác định như là giao của các nửa mặt phẳng và sẽ là một đa giác lồi trên mặt phẳng.

Phương trình $c_1x_1 + c_2x_2 = \alpha$. Khi α thay đổi sẽ xác định trên mặt phẳng các đường song song với nhau và ta sẽ gọi các đường mức với giá trị mức α .

Mỗi điểm $x^* = (x_1^*, x_2^*) \in D$ sẽ nằm trên đường mức với giá trị mức:

$$\alpha^* = c_1x_1^* + c_2x_2^*.$$

Bài toán đặt ra có thể phát biểu theo ngôn ngữ hình học như sau:

Trong số các đường mức cắt D, hãy tìm đường mức với giá trị mức nhỏ nhất (lớn nhất)

Nếu dịch chuyển song song các đường mức theo hướng vec tơ pháp tuyến của chúng $\vec{n} = (c_1, c_2)$ thì giá trị mức sẽ tăng (hoặc giảm nếu dịch chuyển theo hướng ngược lại). Do đó để giải bài toán ta tiến hành như sau:

Bước 1: Vẽ miền chấp nhận được D.

Bước 2: Bắt đầu từ một đường mức cắt D ta dịch chuyển song song các đường mức theo hướng (hay ngược hướng) vec tơ pháp tuyến của chúng $\vec{n} = (c_1, c_2)$ cho đến khi nào việc dịch chuyển tiếp theo làm cho đường mức không cắt D nữa thì dừng.

Điểm cắt D (có thể nhiều điểm) nằm trên đường mức cuối cùng này sẽ là lời giải tối ưu. Còn giá trị của hàm mục tiêu (tức là giá trị mức) tại đó là giá trị tối ưu cần tìm của bài toán.

Nhận xét

Do trong quá trình vẽ miền D không thể tránh khỏi sai số (mà phần chính là khi vẽ, xác định tọa độ, xác định vuông góc...) nên việc tin cậy để xác định tọa độ tối ưu không cao. Không mất tính chính xác của bài toán, ta có thể giải bài toán quy hoạch tuyến tính dạng hai biến hay ba biến được tóm tắt theo các bước sau:

Bước 1: Vẽ miền chấp nhận được D (tức là ta xác định miền giao nhau của các nửa mặt phẳng hay nửa không gian do điều kiện ràng buộc).

Bước 2: Nếu $D \neq \emptyset$ và bị chặn (chặn dưới đối với bài toán ta xét là dạng min, chặn trên đối với bài toán ta xét là dạng max) thì khi đó bài toán có phương án tối ưu. Ta xác định tọa độ các đỉnh (sang bước 3). Ngược lại, kết luận bài toán vô nghiệm. Dừng.

Bước 3: Tính giá trị của $f(x)$ tại các đỉnh đó rồi kết luận (tức là tìm giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất của $f(x)$).

1.3.2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Xét bài toán, tìm $x = (x_1, x_2)$ thỏa mãn:

$$f(x) = 5x_1 + 3x_2 \rightarrow \max \quad (1)$$

$$\begin{cases} 9x_1 + 3x_2 \leq 27 \\ 2x_1 + x_2 \leq 7 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 12 \end{cases} \quad (2)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \quad (3)$$

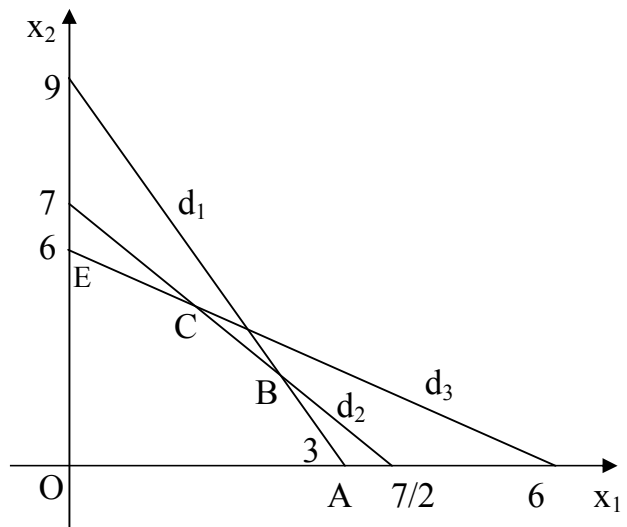
Giải:

* Vẽ miền phương án D:

Gọi d_1 : là đường thẳng $9x_1 + 3x_2 = 27$

d_2 : là đường thẳng $2x_1 + x_2 = 7$

d_3 : là đường thẳng $2x_1 + 2x_2 = 12$



Hình 1.1.

Khi đó ta được miền phương án D

của bài toán là hình đa giác OABCE

(Hình 1.1.). Đó là một đa giác lồi kín, nên bài toán có phương án tối ưu x^0 .

* Tìm phương án tối ưu.

Thấy rằng các điểm: $A = d_1 \cap Ox_1 : \begin{cases} 9x_1 + 3x_2 = 27 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(0,3); f(A) = 9$

$B = d_1 \cap d_2 : \begin{cases} 9x_1 + 3x_2 = 27 \\ 2x_1 + x_2 = 7 \end{cases} \Rightarrow B(2,3); f(B) = 19$

$C = d_2 \cap d_3 : \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 7 \\ 2x_1 + 2x_2 = 12 \end{cases} \Rightarrow C(1,5); f(C) = 20$

$E = d_3 \cap Ox_2 : \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 12 \\ x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow E(0,6); f(E) = 18$

$O(0,0); f(O) = 0.$

Từ đó $\max f = \max \{9, 19, 20, 18, 0\} = 20 = f(C).$

Vậy $x^0 = (1,5)$ là nghiệm tối ưu của bài toán.

Ví dụ 2: Xét bài toán, tìm $x = (x_1, x_2, x_3)$ thoả mãn:

$$f(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 20 \rightarrow \max. \quad (1)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \\ x_1 \leq 2 \end{cases} \quad (2)$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0. x_3 \geq 0 \quad (3)$$

Giải.

* *Vẽ miền phương án D*

Từ (1) và (2) ta thấy miền phương án D là hình chóp cắt $ABCOB'C'$. Đó là một đa diện lồi kín, nên bài toán đã cho có phương án tối ưu.

* *Tìm phương án tối ưu x^0*

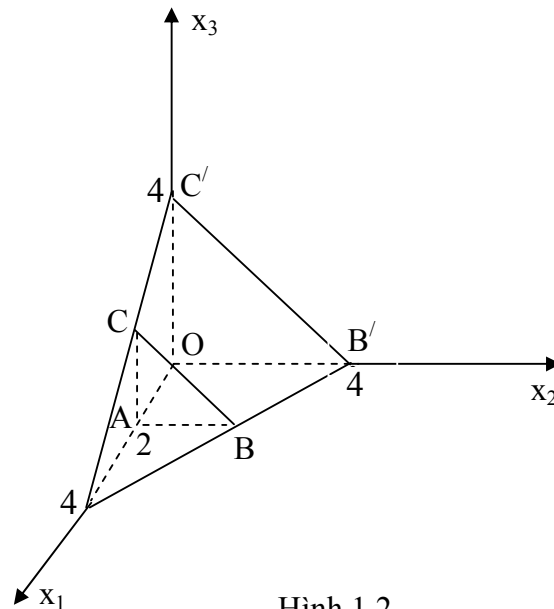
Thấy ngay rằng các điểm:

$A(2,0,0)$ có $f(A) = -18$

$O(0,0,0)$ có $f(O) = -20$

$B'(0,4,0)$ có $f(B') = -12$

$C'(0,0,4)$ có $f(C') = -18$



Hình 1.2.

Ký hiệu (P) là mặt phẳng $x_1 + x_2 + x_3 = 4$; (Q) là mặt phẳng $x_1 = 2$; (K) là mặt phẳng tọa độ (x_1Ox_2) và (J) là mặt phẳng tọa độ (x_1Ox_3) , (Hình 1.2.) thì các điểm:

$$B = (P) \cap (Q) \cap (K) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 = 2 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(2,2,0) \text{ với } f(B) = -14$$

$$C = (P) \cap (Q) \cap (J) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 = 2 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(2,0,2) \text{ với } f(C) = -12$$

Từ đó $\max f = \max \{-18, -20, -12, -14, -12, -8\} = -8 = f(C')$

Vậy phương án tối ưu $x^0 = (0, 0, 4)$.

Chú ý: Có nhiều bài toán khi ta tiến hành giải bằng phương pháp hình học, miền phương án là tập lồi nhưng không phải là đa diện.

Ví dụ 3: Tìm $x = (x_1, x_2)$ thỏa mãn:

$$f(x) = 2x_1 + 3x_2 + 7 \rightarrow \min \quad (1)$$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 \geq 10 \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 12 \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 16 \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ x_1 \geq 1 \end{cases} \quad (2)$$

$$x_1 > 0; x_2 \geq 0 \quad (3)$$

Giải.

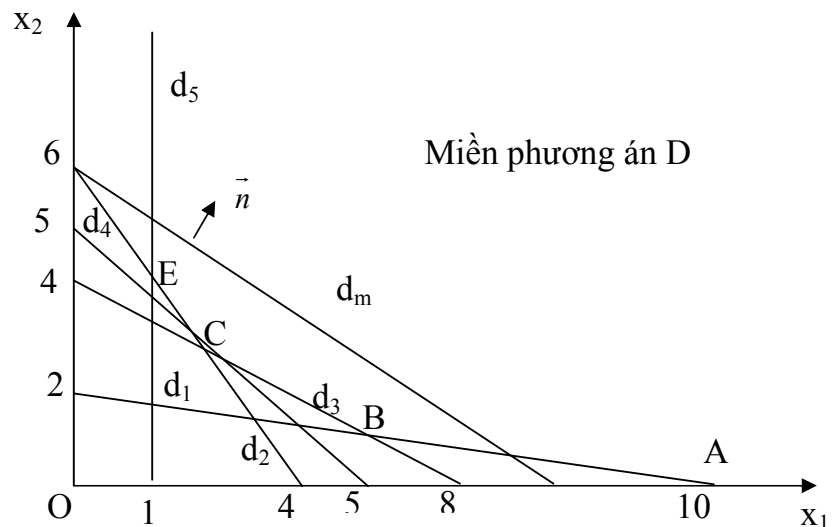
* Vẽ miền phương án A

Gọi các đường thẳng: $d_1: x_1 + 5x_2 = 10$; $d_2: 3x_1 + 2x_2 = 12$; $d_3: 2x_1 + 4x_2 = 16$;

$d_4: 2x_1 + 2x_2 = 10$; $d_5: x_1 = 1$.

Từ (1) và (2) ta có miền phương án D là một tập lồi (không kín):

$+\infty ABCE+\infty$ và không rỗng. Bởi vậy bài toán đã cho muốn có phương án tối ưu thì hàm mục tiêu $f(x)$ phải được chặn dưới.



Hình 1.3.

- Gọi d_m là đường thẳng $2x_1 + 3x_2 = m$ (m là tham số). Ta thấy khi m giảm, đường thẳng d_m tịnh tiến ngược chiều với vec tơ pháp tuyến $\vec{n} = (2, 3)$ của đường thẳng $d_{(m)}$. Điều đó chứng tỏ hàm mục tiêu $f(x) = +7$ bị chặn dưới bởi biên của miền phương án D (Hình 1.3.) nên bài toán đã cho có phương án tối ưu x^0 .

* Tìm phương án tối ưu x^0 :

$$A = d_1 \cap Ox_1 : \begin{cases} x_1 + 5x_2 = 10 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(10, 0); f(A) = 27;$$

$$B = d_1 \cap d_3 : \begin{cases} x_1 + 5x_2 = 10 \\ 2x_1 + 4x_2 = 16 \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{20}{3}, \frac{2}{3}\right); f(B) = \frac{67}{3};$$

$$C = d_2 \cap d_3 \cap d_4 : \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 12 \\ 2x_1 + 4x_2 = 16 \\ 2x_1 + 2x_2 = 10 \end{cases} \Rightarrow C(2, 3); f(C) = 20;$$

$$E = d_2 \cap d_5 : \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 12 \\ x_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow E\left(1, \frac{9}{2}\right); f(E) = \frac{45}{2}.$$

$$\text{Từ đó } \min f = \min \left\{ 27, \frac{67}{3}, 20, \frac{45}{2} \right\} = 20 = f(C).$$

Vậy phương án tối ưu $x^0 = (2, 3)$.

Nhận xét

- Phương án tối ưu của bài toán quy hoạch tuyến tính có thể đạt tại nhiều điểm.

- Đối với các bài toán có dạng 2, 3 biến thì dùng phương pháp hình học chứng minh là rất đơn giản trong việc tìm phương án tối ưu x^0 của bài toán nhưng khi $n \geq 4$ (tức là đối với các bài toán nhiều hơn 4 biến thì dùng phương pháp hình học sẽ không giải được nếu bài toán không thể biến đổi về bài toán dạng 2 biến, 3 biến (làm giảm biến). Vậy thì sao?

- Trong hoạt động kinh tế xã hội luôn đặt ra các bài toán tối ưu. Ví dụ tìm phương án sản xuất cho lợi nhuận cao nhất, chất lượng sản phẩm tốt nhất giá thành rẻ nhất và ảnh hưởng môi trường sống ít nhất. Dạng bài toán này người ta gọi là tối ưu đa mục tiêu. (Quy hoạch đa mục tiêu).

Bài tập chương 1

BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

A. Lập mô hình toán học

Bài 1.

Một công ty A muốn sản xuất ra 3 loại sản phẩm: S_1 ; S_2 ; S_3 . Với định mức tiêu hao nguyên liệu, lao động và lợi nhuận của một sản phẩm được cho ở bảng sau:

Sản phẩm Chi phí	S_1	S_2	S_3	Số lượng nguyên liệu hiện có (m)
Nguyên liệu 1 (N_1)	4	5	3	15.000
Nguyên liệu 2 (N_2)	2	4	3	12.000
Nguyên liệu 3 (N_3)	3	6	4	10.000
Lao động (phút)	10	7	6	500.000
Lợi nhuận (đồng)	5.000	10.000	7.000	

Hãy lập mô hình bài toán sao cho công ty A có lợi nhuận lớn nhất. Biết rằng các sản phẩm sản xuất ra tiêu thụ hết.

Bài 2.

Một xí nghiệp sản xuất 3 loại sản phẩm A, B và C. Định mức hao phí nguyên liệu, vốn, lao động (giờ công) và lợi nhuận thu được tính cho một đơn vị sản phẩm mỗi loại cho ở bảng sau:

	Sản phẩm A	Sản phẩm B	Sản phẩm C	Mức huy động tối đa
Nguyên liệu (kg)	2	3	3	150
Vốn (1.000đ)	1	3	5	120
Lao động (giờ công)	4	8	1	100
Lợi nhuận (1.000đ)	2	3	5	

Hãy lập mô hình bài toán tìm phương án sản xuất sao cho trong phạm vi số nguyên liệu, vốn, giờ công huy động được, xí nghiệp đạt lợi nhuận cao nhất.

Bài 3.

Để nuôi một loại gia súc có hiệu quả, trong một ngày cần phải có khối lượng tối thiểu các chất: Protic, Gluxit, chất khoáng tương ứng là: 90 gram, 130 gram, 10

gram. Tỷ lệ phần trăm theo khối lượng các chất trên có trong các loại thức ăn A, B, C như sau:

Thức ăn	Chất dinh dưỡng		
	Protit	Gluxit	Khoáng
A	10	30	2
B	20	40	1
C	30	20	3

Cho biết giá 1 kg thức ăn A, B, C tương ứng là 3000 đồng, 4000 đồng, 5000 đồng. Hãy lập mô hình bài toán bằng cách xác định khối lượng thức ăn cần thiết sao cho chi phí nuôi gia súc là thấp nhất.

Bài 4.

Một nhà máy sản xuất 3 loại sản phẩm S_1 , S_2 và S_3 . Các sản phẩm này được chế biến từ 2 loại vật liệu: V_1 và V_2 . Lượng vật liệu V_i dùng để sản xuất một đơn vị sản phẩm S_i , giá bán một đơn vị sản phẩm S_i , số vật liệu nhà máy có, được cho ở bảng sau:

	Sản phẩm S_1	Sản phẩm S_2	Sản phẩm S_3	Số lượng có
Vật liệu V_1	4	2	5	10.000
Vật liệu V_2	2	6	3	14.000
Giá bán (1.000đ)	12	8	14	

Hãy lập mô hình bài toán tìm phương án sản xuất, xác định số lượng sản phẩm mỗi loại, sao cho trong phạm vi số vật liệu đã có nhà máy đạt tổng thu nhập lớn nhất.

Bài 5.

Một nhà máy sản xuất 3 loại sản phẩm A, B và C. Các sản phẩm này được chế biến từ 4 loại nguyên liệu: loại I, loại II, loại III và loại IV. Nhu cầu về nguyên liệu mỗi loại của 1 tấn sản phẩm A, B, C; khả năng dự trữ (tấn) của mỗi loại nguyên liệu; và tiền lãi (triệu đồng) từ 1 tấn sản phẩm mỗi loại được cho ở bảng sau:

	Sản phẩm A	Sản phẩm B	Sản phẩm C	Khả năng dự trữ của các loại NL
Nguyên liệu loại I	0,2	0,1	0	≤ 100
Nguyên liệu loại II	0	0,2	0,3	≤ 150
Nguyên liệu loại III	0,3	0,3	0,4	≤ 200
Nguyên liệu loại IV	0,2	0,3	0,1	≤ 250
Tiền lãi (Triệu đồng / 1 tấn SP)	3	2	1	max

Tim khối lượng (tấn) sản phẩm mỗi loại cần sản xuất để tổng tiền lãi là lớn nhất.

Bài 6.

Một nhà máy sản xuất 3 loại sản phẩm A, B và C. Các sản phẩm này được chế biến từ 4 loại nguyên liệu: loại I, loại II, loại III và loại IV. Nhu cầu về nguyên liệu mỗi loại của 1 tấn sản phẩm A, B, C; khả năng dự trữ (tạ) của mỗi loại nguyên liệu; và tiền lãi (triệu đồng) từ 1 tạ sản phẩm mỗi loại được cho ở bảng sau:

	Sản phẩm A	Sản phẩm B	Sản phẩm C	Khả năng dự trữ của các loại NL
NL loại I	2	4	3	≥ 600
NL loại II	4	0	6	$= 700$
NL loại III	0	6	4	$= 800$
NL loại IV	6	5	1	≤ 1200
Tiền lãi (Triệu đồng / 1 tạ SP)	3	2	1	max

Tim khối lượng (tạ) sản phẩm mỗi loại cần sản xuất để tổng tiền lãi là lớn nhất.

B. Dùng phương pháp hình học giải các bài toán sau đây

Bài 7. Tim $x = (x_1, x_2)$ thỏa mãn:

$$f(x) = -x_1 - x_2 + 2005 \rightarrow \min \quad (1)$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 1 \geq 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 6 \geq 0 \\ -3x_1 - x_2 + 9 \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \quad (3)$$

Bài 8. Tim $x = (x_1, x_2, \dots, x_6)$ thỏa mãn:

$$f(x) = -7x_1 - 5x_2 + 2005 \rightarrow \min \quad (1)$$

$$\begin{cases} x_3 = 19 - 2x_1 - 3x_2 \\ x_4 = 13 - 2x_1 - x_2 \\ x_5 = 15 - 3x_2 \\ x_6 = 18 - 3x_1 \end{cases} \quad (2)$$

$$x_j \geq 0; (\forall j : j = \overline{1,6}) \quad (3)$$

Bài 9. Tìm x (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) thoả mãn

$$f(x) = 5x_1 + 3x_2 + 2006 \rightarrow \min \quad (1)$$

$$\begin{cases} x_3 = 9 - 3x_1 - x_2 \\ x_4 = 7 - 2x_2 - x_2 \\ x_5 = 6 - x_1 - x_2 \end{cases} \quad (2)$$

$$x_j \geq 0; (\forall j : j = \overline{1,5}). \quad (3)$$

Bài 10. Tìm (x, y) sao cho:

$$f(x, y) = y - x + 2006 \rightarrow \min \quad (1)$$

$$\begin{cases} -2x + y \leq 2 \\ x - 2y \leq 2 \\ x + y \leq 5 \end{cases} \quad (2)$$

$$x \geq 0; y \geq 0 \quad (3)$$

Bài 11. Tìm (x, y) sao cho:

$$f(x,y) = -2x + 7y + 2006 \rightarrow \max \quad (1)$$

$$\begin{cases} 9x + 7y \leq 63 \\ 2x + y \geq 6 \\ x - 2y \leq -6 \end{cases} \quad (2)$$

$$x \geq 0; y \geq 0 \quad (3)$$

Chương 2. TÍNH CHẤT CỦA TẬP PHƯƠNG ÁN VÀ TẬP PHƯƠNG ÁN TỐI ƯU CỦA BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

2.1. Tập hợp lồi

2.1.1. Tổ hợp lồi

Cho m điểm $x_i, (\forall i : i = \overline{1, m})$ trong không gian R^n . Điểm x được gọi là tổ hợp lồi của các điểm x_i nếu:

$$x = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m$$

trong đó $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ là các số không âm thoả $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = 1$.

- Khi x là tổ hợp lồi của hai điểm x_1, x_2 người ta thường viết:

$$x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \quad (0 \leq \lambda \leq 1).$$

Nếu $0 < \lambda < 1$ thì x được gọi là tổ hợp lồi thật sự.

2.1.1.1. Đoạn thẳng

Tập hợp tất cả các tổ hợp lồi của hai điểm bất kỳ $A, B \in R^n$ được gọi là đoạn thẳng nối A và B . Ký hiệu: $\delta_{AB} = \{x = \lambda A + (1 - \lambda)B \text{ với } \lambda \in [0, 1]\}$.

2.1.1.2. Nhận xét

Tổ hợp lồi có tính chất bắc cầu.

2.1.2. Tập hợp lồi

2.1.2.1. Định nghĩa

Tập con S của R^n được gọi là tập hợp lồi khi S chứa toàn bộ đoạn thẳng nối hai điểm bất kỳ của S .

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in S; \quad \forall x, y \in S; \forall \lambda \in [0, 1].$$

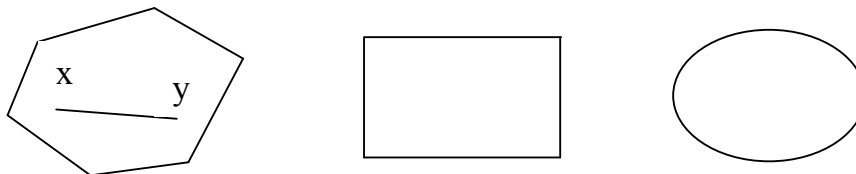
Tập hợp rỗng và tập hợp chỉ có một phần tử được xem là tập hợp lồi.

2.1.2.2. Một số tính chất cơ bản của các tập hợp lồi:

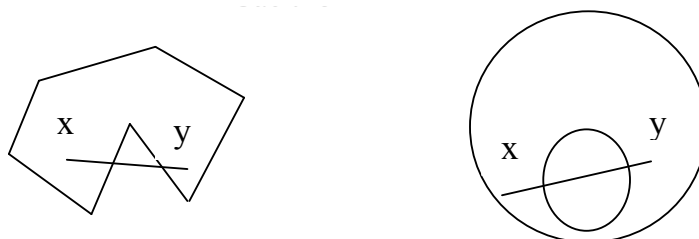
- Giao của một số bất kỳ các tập hợp lồi là một tập hợp lồi.
- Nếu hai tập hợp C, D là tập lồi thì $C + D, \alpha \cdot C$ ($\alpha \in R$) cũng lồi.
- Nếu S là tập hợp lồi thì S chứa mọi tổ hợp lồi của một họ điểm bất kỳ trong S .

2.1.2.3. Các ví dụ về tập hợp lồi

Toàn không gian R^n , siêu phẳng, nửa không gian đóng (mở), hình cầu trong R^n , hình tam giác, hình vuông, hình tròn, hình elip, mặt phẳng, nửa mặt phẳng trong R^2 ... Tuy nhiên, đường tròn hay hình vành khăn không phải là tập hợp lồi.



Hình 2.1. Các tập hợp lồi



Hình 2.2. Các tập hợp không lồi

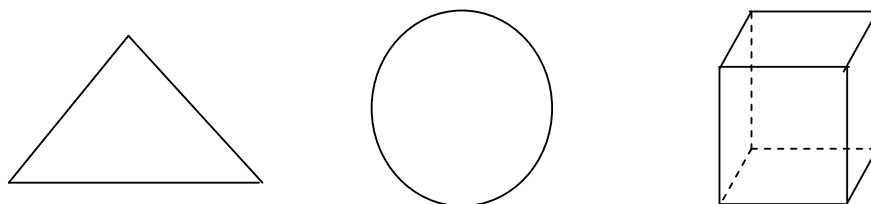
2.1.3. Điểm cực biên của một tập hợp lồi

2.1.3.1. Định nghĩa

Điểm x của tập hợp lồi $S \subset R^n$ được gọi là điểm cực biên nếu không thể biểu diễn được x dưới dạng một tổ hợp lồi thật sự của hai điểm khác biệt bất kỳ nào khác của S , tức là không tồn tại $y, z \in S, y \neq z$ sao cho $x = \lambda y + (1 - \lambda)z$ với $0 < \lambda < 1$.

2.1.3.2. Các ví dụ về điểm cực biên:

Trong R^2 mỗi đỉnh của một tam giác là một điểm cực biên của nó, mỗi điểm trên đường tròn là một điểm cực biên của hình tròn bao gồm cả vòng tròn chu vi. Nếu một tập hợp lồi không chứa biên thì nó không có điểm cực biên.



Hình 2.3. Điểm cực biên

2.1.4. Bao lồi

2.1.4.1. Định nghĩa

Cho trước một tập hợp tùy ý $S \subset R^n$, bao giờ cũng tồn tại một tập hợp lồi nhỏ nhất bao hàm S (giao của tất cả các tập hợp lồi bao hàm S), đó là tập hợp tất cả các tổ hợp lồi của các điểm thuộc S.

Tập hợp này gọi là bao lồi của S và được ký hiệu là $convS$.

2.1.4.2. Ví dụ về bao lồi

Khi S là 8 đỉnh của một hình lập phương thì $convS$ là toàn bộ hình lập phương đó.

2.1.5. Đa diện lồi và tập lồi đa diện

2.1.5.1. Đa diện lồi.

Tập hợp S tất cả các tổ hợp của các điểm $x_1; x_2, \dots, x_m$ cho trước được gọi là đa diện lồi sinh ra bởi các điểm đó.

Đa diện lồi là một tập hợp lồi.

Trong đa diện lồi người ta có thể loại bỏ dần các điểm là tổ hợp của các điểm còn lại. Khi đó, người ta thu được một hệ các điểm, giả sử là: $y_1; y_2, \dots, y_p, (p \leq m)$. Các điểm này chính là các điểm cực biên của đa diện lồi, chúng sinh ra đa diện lồi đó.

Số điểm cực biên của đa diện lồi là hữu hạn.

2.1.5.2. Siêu phẳng - Nửa không gian

$A = (a_{ij})_{m,n}$ là ma trận cấp m.n

$A_i, (\forall i : i = \overline{1, m})$ là hàng thứ i của ma trận A.

Siêu phẳng trong R^n là tập các điểm $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ thoả $A_i x = b_i$.

Nửa không gian trong R^n là tập các điểm $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ thoả $A_i x \geq b_i$.

Siêu phẳng và nửa không gian đều là các tập hợp lồi.

2.1.5.3. Tập lồi đa diện hay khúc lồi

Giao của một số hữu hạn các nửa không gian trong R^n được gọi là tập lồi đa diện hay một khúc lồi.

Nói cụ thể hơn, đó là tập hợp các điểm $x \in R^n$ nghiệm đúng $Ax \leq b$ trong đó A là một ma trận cấp m.n và $b \in R^m$

Một khúc lồi có thể không giới nội (Hình 2.4.a).

Một khúc lồi giới nội còn được gọi là một đa diện lồi (Hình 2.4.b).

Tập lồi đa diện là một tập hợp lồi.

Các đa giác lồi theo nghĩa thông thường trong \mathbb{R}^2 là những ví dụ hiển nhiên về đa diện lồi.



Hình 2.4.

2.2. Tính chất của tập phương án và phương án tối ưu của bài toán quy hoạch tuyến tính

2.2.1. Định lý 1 (Tính lồi của tập phương án)

- Tập hợp các phương án của một bài toán quy hoạch tuyến tính là một tập lồi đa diện.
- Tập hợp các phương án tối ưu của một bài toán quy hoạch tuyến tính là một tập lồi.

2.2.2. Định lý 2 (Sự tồn tại lời giải của bài toán quy hoạch tuyến tính)

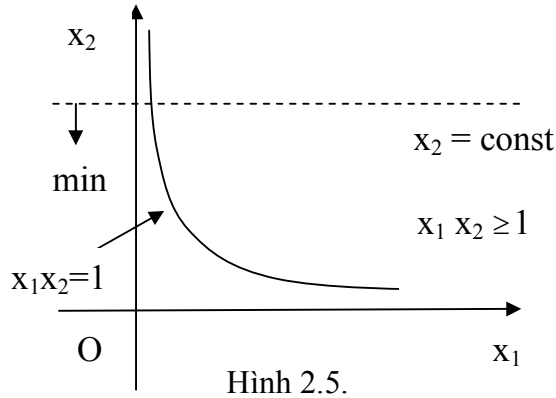
Nếu một quy hoạch tuyến tính có ít nhất một phương án và hàm mục tiêu bị chặn dưới trong miền ràng buộc (đối với bài toán min) thì bài toán chắc chắn có phương án tối ưu.

Nhận xét

Kết luận của định lý nói chung không còn đúng đối với các bài toán không phải là quy hoạch tuyến tính (hàm mục tiêu không phải là tuyến tính hoặc miền ràng buộc không phải là một khúc lồi).

Để rõ hơn, ta xét ví dụ cụ thể sau:

$$f(x) = x_2 \rightarrow \min, \text{ với điều kiện } x_1 x_2 \geq 1, x_1 \geq 0.$$



Hình 2.5.

Miền chấp nhận được $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 x_2 \geq 1; x_1 \geq 0\}$ (Hình 2.5.) là một tập hợp lồi khác rỗng và hàm mục tiêu bị chặn dưới trong miền này:

$$x_2 \geq 0 \text{ với mọi } x = (x_1, x_2) \in D.$$

Điểm $\left(\frac{1}{\varepsilon}; \varepsilon\right) \in D$ với mọi $\varepsilon > 0$ nhưng không có $(x_1, 0) \in D$. Vì thế cận dưới

của x_2 không đạt được tại bất cứ điểm nào thuộc D .

Cũng có thể lấy ví dụ với hàm mục tiêu phi tuyến và miền ràng buộc là một khúc lồi cho thấy định lý trên không đúng.

2.2.3. Định lý 3

Nếu x^0 là một phương án tối ưu của bài toán quy hoạch tuyến tính (dạng bất kỳ) và nếu x_1, x_2 ($x_1 \neq x_2$) là hai phương án thoả mãn $x^0 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, 0 < \lambda < 1$ thì x_1, x_2 cũng là các phương án tối ưu.

2.3. Tính chất của bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc

Một phương án $x \in D$ mà đồng thời là đỉnh của D gọi là một phương án cực biên, nghĩa là x không thể biểu diễn dưới dạng một tổ hợp lồi của bất cứ hai phương án bất kỳ nào khác của D .

Sau đây ta sẽ tập trung nghiên cứu bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc với giả thiết $m \leq n$ và ma trận A có hạng bằng m .

2.3.1. Định lý 1 (Tính chất đặc trưng của các phương án cực biên)

Để một phương án $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ của bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc là phương án cực biên, thì điều kiện cần và đủ là hệ các vec tơ cột A_j của ma trận A ứng với các thành phần $x_j^0 > 0$ là độc lập tuyến tính.

Có thể dùng định lý 1 để kiểm tra xem một vec tơ cho trước có phải là phương án cực biên của bài toán hay không.

Ví dụ 1:

Cho bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc với các điều kiện sau:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_j \geq 0, (\forall j : j = \overline{1,2}) \end{cases}$$

Hãy cho biết các vec tơ dưới đây

$$x^1 = (2, 2, 0), \quad x^2 = (0, 0, 4), \quad x^3 = (1, 1, 2)$$

có phải là phương án cực biên của bài toán này hay không?

Giải:

Kiểm tra trực tiếp ta thấy x^1, x^2, x^3 thoả mãn điều kiện nên chúng là các phương án của bài toán. Mặt khác, vì

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nên ta thấy hệ $\{A_1, A_2\}$; hệ gồm một vec tơ $\{A_3 \neq 0\}$ là độc lập tuyến tính. Do đó x^1, x^2 là các phương án cực biên của bài toán. Còn hệ $\{A_1, A_2, A_3\}$ phụ thuộc tuyến tính (do $A_1 + A_2 - 2A_3 = 0$) nên x^3 không phải là phương án cực biên của bài toán.

Ví dụ 2:

Cho bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc với các điều kiện sau:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 6 \\ x_j \geq 0, (\forall j : j = \overline{1,4}) \end{cases}$$

Xét xem vec tơ $x = (1,0,1,3)$ có phải là phương án cực biên của bài toán này hay không?

Giải:

Kiểm tra trực tiếp ta thấy vec tơ x thoả mãn điều kiện nên chúng là các phương án của bài toán. Mặt khác, vì hệ 3 vec tơ cột

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}; A_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}; A_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

độc lập tuyến tính (do định thức $|A_1, A_3, A_4| = 5 \neq 0$) nên x là một phương án cực biên của bài toán.

Từ định lý nêu trên ta dễ dàng suy ra các tính chất sau đây:

2.3.2. Hệ quả 1.

Số phương án cực biên của bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc là hữu hạn.

2.3.3. Hệ quả 2.

Số thành phần dương trong mỗi phương án cực biên của bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc tối đa bằng m (m là số hàng của ma trận A).

Người ta phân ra hai loại phương án cực biên: Nếu phương án cực biên có số thành phần dương đúng bằng m nó được gọi là phương án cực biên không suy biến. Trái lại, nó được gọi là phương án cực biên suy biến.

Một ứng dụng cụ thể nữa của các kết quả trên là tìm các phương án cực biên của một bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc có kích thước không lớn. Nếu biết thêm miền ràng buộc của bài toán là giới nội thì có thể tìm lời giải của bài toán bằng cách tính và so sánh giá trị hàm mục tiêu tại các phương án cực biên tìm được.

Ví dụ 3.

Tìm các phương án cực biên không suy biến của bài toán quy hoạch tuyến tính với các ràng buộc sau:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ x_j \geq 0, (\forall j : j = \overline{1,3}). \end{cases}$$

Giải.

Bài toán này có $m = 2$ ràng buộc chính và $n = 3$ biến. Một phương án cực biên có nhiều nhất $m = 2$ thành phần dương, tức là có ít nhất $n - m = 1$ thành phần bằng 0. Vì thế, lần lượt cho $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ ta được:

Với $x_1 = 0$, hệ phương trình trên cho ta $x_2 = \frac{9}{2}; x_3 = 5$.

Với $x_2 = 0$, hệ phương trình trên vô nghiệm

Với $x_3 = 0$, hệ phương trình trên cho ta $x_1 = 5; x_2 = \frac{9}{2}$.

Như vậy, ta nhận hai phương án của bài toán: $(0; \frac{9}{2}; 5)$ và $(5; \frac{9}{2}; 0)$.

Kiểm tra trực tiếp cho thấy hệ $\{A_2 = (-2, 2)^T, A_3 = (3, -1)^T\}$ và $\{A_1 = (3, -1)^T, A_2 = (-2, 2)^T\}$ là độc lập tuyến tính, nên cả hai phương án trên đều là các phương án cực biên không suy biến (số thành phần dương bằng $m = 2$).

Ví dụ 4.

Tìm các phương án cực biên không suy biến của bài toán quy hoạch tuyến tính với các ràng buộc sau:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 = 6 \\ x_j \geq 0, (\forall j : j = \overline{1,4}). \end{cases}$$

Giải.

Bài toán này có $m = 2$ ràng buộc chính và $n = 4$ biến. Một phương án cực biên có nhiều nhất $m = 2$ thành phần dương, tức là có ít nhất $n - m = 2$ thành phần bằng 0. Vì thế, lần lượt cho $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$ ta được:

Với $x_1 = x_2 = 0$, hệ phương trình trên cho ta $x_3 = 8; x_4 = 2$.

Với $x_1 = x_3 = 0$, hệ phương trình trên cho ta $x_2 = \frac{16}{3}; x_4 = \frac{14}{3}$.

Với $x_1 = x_4 = 0$, hệ phương trình trên vô nghiệm (không có nghiệm không âm).

Với $x_2 = x_3 = 0$, hệ phương trình trên vô nghiệm (không có nghiệm không âm).

Với $x_2 = x_4 = 0$, hệ phương trình trên cho ta $x_1 = 4; x_3 = 6$.

Với $x_3 = x_4 = 0$, hệ phương trình trên cho ta $x_1 = 7; x_2 = 3$.

Như vậy, ta nhận được các phương án của bài toán sau đây:

$$x^1 = (0,0,8,2), x^2 = \left(0, \frac{16}{3}, 0, \frac{14}{3}\right); x^3 = (4,0,6,0); x^4 = (7,3,0,0).$$

Kiểm tra trực tiếp cho thấy cả 4 phương án trên đều là các phương án cực biên không suy biến (số thành phần dương bằng $m = 2$).

2.3.4. Định lý 2.

Nếu bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc có ít nhất một phương án thì nó cũng có phương án cực biên (miền ràng buộc D có đỉnh).

2.3.5. Định lý 3.

Nếu bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc có phương án tối ưu thì cũng có phương án cực biên tối ưu.

Các định lý trên cho phép tìm phương án tối ưu của bài toán quy hoạch tuyến tính chính tắc trong số các phương án cực biên của bài toán (số này là hữu hạn).

Bài tập chương 2.

TÍNH CHẤT CỦA TẬP PHƯƠNG ÁN VÀ TẬP PHƯƠNG ÁN TỐI ƯU

Bài 1.

Cho C, D là hai tập lồi trong R^n . Chứng minh rằng: $C \cap D; C + D; C - D$ là các tập hợp lồi.

Bài 2.

Chứng minh rằng các tập hợp sau đây là các tập hợp lồi:

$$\text{a) } A = \{(x_1, x_2) \in R^2 : x_2 \geq ax_1 + b; a, b \in R\}$$

$$\text{b) } B = \{(x_1, x_2) \in R^2 : x_2 \geq ax_1^2; (a > 0)\}$$

$$\text{c) } C = \{(x_1, x_2) \in R^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq \pi^2\}.$$

Bài 3.

Chứng tỏ $D = \{(x_1, x_2) \in R^2 : x_2 \leq ax_1^2; (a > 0)\}$ không phải là tập hợp lồi.

Bài 4.

Tìm các phương án cực biên không suy biến của bài toán quy hoạch tuyến tính với các điều kiện ràng buộc sau:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_j \geq 0, (\forall j : j = \overline{1,3}). \end{cases}$$

Bài 5.

Tìm các phương án cực biên không suy biến của bài toán quy hoạch tuyến tính với các điều kiện ràng buộc sau:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 14 \\ x_j \geq 0, (\forall j : j = \overline{1,3}). \end{cases}$$

Bài 6.

Tìm các phương án cực biên không suy biến của bài toán quy hoạch tuyến tính với các điều kiện ràng buộc sau:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_j \geq 0, (\forall j : j = \overline{1,3}). \end{cases}$$

Chương 3. PHƯƠNG PHÁP ĐƠN HÌNH VÀ CÁC THUẬT TOÁN CỦA NÓ

3.1. Cơ sở lý luận của phương pháp đơn hình

3.1.1. Định nghĩa

Cho bài toán quy hoạch chính tắc:

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \min/(\max) \quad (1)$$

với điều kiện

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (2)$$

$$x_j \geq 0; (\forall j : j = \overline{1, n}) \quad (3)$$

Bài toán quy hoạch tuyến tính trên có thể viết dưới dạng ma trận như sau:

$$f = c^T \cdot x \rightarrow \min/(\max) \quad (1')$$

với điều kiện

$$A \cdot x = b \quad (2')$$

$$x \geq 0 \quad (3')$$

trong đó
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m,n}$$

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ta nhắc lại các khái niệm cơ bản:

- Hàm f gọi là *hàm mục tiêu* của bài toán

- *Phương án* của bài toán là vectơ $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ thoả mãn ràng buộc (2) và

(3). Ký hiệu S là tập tất cả các phương án của bài toán.

- *Phương án tối ưu* của bài toán là $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ làm cho hàm mục tiêu f(x)

đạt giá trị nhỏ nhất đối với bài toán min và lớn nhất đối với bài toán max, tức là

phương án thoả mãn điều kiện (1). Ký hiệu S^* là tập tất cả các phương án tối ưu của bài toán.

- *Trị tối ưu* của bài toán là trị

$$f^*(x) = c_1 x_1^* + c_2 x_2^* + \dots + c_n x_n^*$$

trong đó $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ là phương án tối ưu.

- Phương án cơ sở: Cho hạng của ma trận A là r. Phương án

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

gọi là phương án cơ sở, nếu các vectơ cột của A tương ứng với các thành phần dương của x, tức là $\{A_i | x_i > 0\}$ độc lập tuyến tính. Các biến $x_i > 0$ gọi là biến cơ sở, các biến khác gọi là biến ngoài cơ sở.

Nếu số biến cơ sở dương nhỏ hơn r, thì x gọi là phương án cơ sở suy biến, ngược lại gọi là phương án cơ sở không suy biến.

3.1.2. Các tính chất cơ bản

3.1.2.1. Định lý 1.

- i) Tập phương án S là đa diện lồi.
- ii) Nếu hàm mục tiêu $f(x) = c^T \cdot x$ bị chặn dưới (trên) miền phương án S, thì tồn tại phương án tối ưu.
- iii) Nếu bài toán có phương án tối ưu, thì nó có phương án cơ sở tối ưu.

Chứng minh:

- Suy ra từ định nghĩa.
- Theo định lý 1 chúng ta đi tìm phương án cơ sở tối ưu.

Giả sử $x^0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ là phương án cơ sở nào đó của bài toán. Để đơn giản ta giả thiết hạng của ma trận hệ số $A = (a_{ij}), (\forall (i, j) : i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$ là m và $x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}$ là các thành phần cơ sở. Khi đó x^0 có dạng:

$$x^0 = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, 0, \dots, 0)$$

và hệ (2) tương đương với hệ:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 - (\alpha_{1(m+1)}x_{m+1} + \dots + \alpha_{1n}x_n) \\ \dots \\ x_m = \alpha_m - (\alpha_{m(m+1)}x_{m+1} + \dots + \alpha_{mn}x_n) \end{cases} \quad (2')$$

Hàm mục tiêu $f(x)$ sẽ có dạng:

$$\begin{aligned} f(x) &= c_1 x_1 + \dots + c_n x_n \\ &= \sum_{i=1}^m c_i x_i + \left(c_{m+1} - \sum_{i=1}^m \alpha_{i(m+1)} \right) x_{m+1} + \dots + \left(c_n - \sum_{i=1}^m \alpha_{in} \right) x_n \\ &= f(x^0) - (\alpha_{0(m+1)} x_{m+1} + \dots + \alpha_{0n} x_n) \end{aligned} \quad (1')$$

trong đó $\alpha_{0j} = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} - c_j; (\forall j : j = \overline{m+1, n})$

3.1.2.2. Định lý 2.

Nếu $\alpha_{0j} \leq 0, (\forall j : j = \overline{m+1, n})$ thì x^0 là phương án cơ sở tối ưu.

Chứng minh:

Cho

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

là phương án bất kỳ của bài toán.

Vì $\alpha_{0j} \leq 0$ và $x_j \geq 0, (\forall j : j = \overline{m+1, n})$ nên ta có:

$$f(x) = f(x^0) - (\alpha_{0(m+1)} x_{m+1} + \dots + \alpha_{0n} x_n) \geq f(x^0).$$

3.1.2.3. Định lý 3.

Nếu tồn tại $k \in \{m+1, \dots, n\}$ và $(\forall i : i = \overline{1, m})$ thoả mãn

$$\alpha_{0,k} > 0 \text{ và } \alpha_{i,k} \leq 0 \text{ } (\forall i : i = \overline{1, m})$$

thì hàm mục tiêu không bị chặn dưới, tức bài toán không có lời giải.

Chứng minh:

Với $\lambda > 0$ bất kỳ, xét vectơ $x^\lambda = (x_{\lambda 1}, x_{\lambda 2}, \dots, x_{\lambda n})$

trong đó

$$x_{\lambda i} = \begin{cases} \alpha_i - \lambda \alpha_{ik}, & (\forall i : i = \overline{1, m}) \\ \lambda, & i = k \\ 0 & (\forall i : i = \overline{m+1, n}; i \neq k) \end{cases}$$

$x^\lambda \geq 0$, do $\alpha_{i,k} \leq 0 (\forall i : i = \overline{1, m})$ và thoả (2'), nên nó là phương án $\forall \lambda > 0$.

Ta có

$$f(x^\lambda) = f(x^0) - \alpha_{0,k} x_k = f(x^0) - \lambda \alpha_{0,k} \rightarrow -\infty \text{ khi } \lambda \rightarrow +\infty \text{ vì } \alpha_{0,k} > 0.$$

Vậy hàm mục tiêu không bị chặn dưới.

3.1.2.4. Định lý 4.

Giả sử tồn tại $k \in \{m+1, \dots, n\}$ và $i \in \{1, \dots, m\}$ sao cho:

$$\alpha_{0,k} > 0 \text{ và } \alpha_{i,k} > 0$$

Khi đó tồn tại phương án cơ sở tốt hơn, với x_k là biến cơ sở.

Chứng minh:

Ta đặt

Với $\lambda = \min \left\{ \frac{\alpha_i}{\alpha_{i,k}}, \alpha_{i,k} > 0 \right\}$ và xét vector $x^\lambda = (x_{\lambda 1}, x_{\lambda 2}, \dots, x_{\lambda n})$

trong đó

$$x_{\lambda i} = \begin{cases} \alpha_i - \lambda \alpha_{ik}, & (\forall i : i = \overline{1, m}) \\ \lambda, & i = k \\ 0 & (\forall i : i = \overline{m+1, n}; i \neq k) \end{cases}$$

Ta dễ dàng chỉ ra x^λ là phương án cơ sở và

$$f(x^\lambda) = f(x^0) - \alpha_{0,k} x_k = f(x^0) - \lambda \alpha_{0,k} < f(x^0).$$

3.2. Công thức đổi cơ sở

3.2.1. Phép biến đổi Jordan

Cho ma trận các hệ số cấp $m.n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m,n}$$

Chọn phần tử $a_{pq} \neq 0$; $(\forall (p, q): p = \overline{1, m}, q = \overline{1, n})$. Phép biến đổi Jordan với phần tử a_{pq} (hàng và cột chứa phần tử trụ gọi là hàng trụ, cột trụ) là phép biến đổi ma trận A thành ma trận A' .

$$A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{m1} & a'_{m2} & \dots & a'_{mn} \end{pmatrix} = (a'_{ij})_{m,n}$$

Trong đó phần tử của A' được tính như sau:

Và thực hiện phép biến đổi Jordan với phần tử trụ α_{pq} thì bảng Jordan kết quả sẽ được ký hiệu lại dạng sau:

	1	$-x_p$
.....
$x_q =$	β_{pq}
.....
.....

Trong quá trình biến đổi:

- Nếu hàng trụ là 0 - hàng thì cột $-x_p$ có thể loại bỏ.

Nếu tồn tại 0 - hàng gồm toàn số 0 thì ta có thể loại bỏ hàng đó khỏi bảng Jordan.

3.2.2.2. Dấu hiệu vô nghiệm (không tương thích):

Nếu xuất hiện 0 - hàng có phần tử tự do khác 0 còn các phần tử khác bằng 0 thì hệ phương trình vô nghiệm.

3.2.2.3. Kết luận:

Sau mỗi lần thực hiện phép biến đổi Jordan ta được hệ phương trình tuyến tính tương đương, nên phương pháp trên cho ta lời giải của hệ phương trình tuyến tính ban đầu.

Ví dụ:

Giải hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 6x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 - 2x_4 = 3 \end{cases}$$

Giải.

Ta lập bảng Jordan xuất phát như sau:

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$
$0 =$	-3	1	2	1	-6
$0 =$	0	1	1	1	-4
$0 =$	3	1	0	1	-2

Thực hiện phép biến đổi Jordan với phần tử trụ hàng 2, cột 2 ta có bảng sau:

	1	$-x_1$	$-x_3$	$-x_4$
$0 =$	-3	-1	-1	2
$x_2 =$	0	1	1	-4
$0 =$	3	1	1	-2

Thực hiện phép biến đổi Jordan với phần tử trụ hàng 3, cột 1 ta có bảng sau:

	1	$-x_3$	$-x_4$
$0 =$	0	0	0
$x_2 =$	-3	0	-2
$x_1 =$	3	1	-2

Sau khi loại bỏ 0 - hàng gồm toàn phần tử 0, ta loại bỏ tất cả 0 - hàng. Thuật toán kết thúc và ta có nghiệm:

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 + 2x_4 + 3 \\ x_2 = 2x_4 - 3 \end{cases}$$

trong đó x_1 và x_2 là các biến cơ sở, x_3 và x_4 là các biến tự do.

3.2.3. Phương pháp tìm phương án

Cho hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + \dots + a_{1n}.x_n = a_{10} \\ a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + \dots + a_{2n}.x_n = a_{20} \\ \dots \\ a_{m1}.x_1 + a_{m2}.x_2 + \dots + a_{mn}.x_n = a_{m0} \end{cases} \quad (1)$$

Để tìm phương án (nghiệm không âm) ta thực hiện liên tiếp phép biến đổi Jordan để đưa biến tự do thành biến cơ sở cho đến khi không còn 0 - hàng thì nhận được lời giải, hoặc nhận biết dấu hiệu không có phương án (xem phần sau).

Trong quá trình biến đổi luôn đảm bảo:

- Các phần tử tự do không âm
- Phần tử trụ a_{pq} phải dương và

$$a_{po} / a_{pq} = \min \{ a_{io} / a_{iq} \mid a_{iq} > 0 \} \quad (*)$$

Nếu tồn tại 0 - hàng gồm toàn số 0 thì ta có thể loại bỏ hàng đó khỏi bảng Jordan.

Dấu hiệu không có phương án: Nếu xuất hiện 0 - hàng có phần tử tự do dương, còn các phần tử khác không dương thì hệ không có phương án.

Ví dụ:

Giải hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$$

Giải.

Phương trình thứ 3 có hệ số tự do âm, vì vậy ta nhân 2 vế với -1, và nhận được hệ phương trình tương đương

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 2 \\ -3x_1 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

Ta lập bảng Jordan xuất phát như sau:

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$
0 =	3	2	-1	1	-1
0 =	2	2	-1	0	1
0 =	1	-3	0	1	1

Chọn cột $-x_3$ làm cột trụ ta chọn phần tử trụ theo điều kiện (*)

$$\min\{3/1, 1/1\} = 1/1 \Rightarrow a_{33} = 1 \text{ là phần tử trụ.}$$

Thực hiện phép biến đổi Jordan với phần tử trụ hàng 3, cột 3 ta có bảng sau:

	1	$-x_1$	$-x_3$	$-x_4$
0 =	2	5	-1	-2
0 =	2	2	-1	1
$x_3 =$	1	-3	0	1

Chọn cột $-x_1$ làm cột trụ ta chọn phần tử trụ theo điều kiện (*)

$$\min\{2/5, 2/2\} = 2/5 \Rightarrow a_{11} = 5 \text{ là phần tử trụ.}$$

Thực hiện phép biến đổi Jordan với phần tử trụ hàng 3, cột 1 ta có bảng sau:

	1	$-x_2$	$-x_4$
$x_1 =$	$2/5$	$-1/5$	$-2/5$
$0 =$	$6/5$	$-3/5$	$9/5$
$x_3 =$	$11/5$	$-3/5$	$-1/5$

Phần tử $9/5$ là phần tử dương duy nhất trên cột $-x_4$, vì vậy ta chọn nó làm phần tử trụ. Thực hiện phép biến đổi Jordan với phần tử trụ hàng 2, cột 2 ta có bảng sau:

	1	$-x_2$
$x_1 =$	$2/3$	
$x_4 =$	$2/3$	
$x_3 =$	$7/3$	

Đến đây không còn 0 - hàng nữa, quá trình giải kết thúc. Ta nhận được phương án cơ sở

$$x_1 = \frac{2}{3}; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = \frac{7}{3}; \quad x_4 = \frac{2}{3}.$$

trong đó x_1, x_3 và x_4 là các biến cơ sở, x_2 là biến tự do.

Chú ý:

Nếu biến x_k chỉ xuất hiện ở một phương trình với hệ số 1 thì ta có thể đưa nó vào cơ sở ngay ở bước xuất phát.

Ví dụ:

Giải hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 & = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_5 & = 7 \\ -x_1 - 3x_2 - 4x_3 & + x_6 = 12 \end{cases}$$

Giải.

Nhận xét: x_4 và x_6 chỉ xuất hiện 1 lần ở phương trình 1 và 3, vì vậy ta có thể đưa chúng vào cơ sở ngay ở bảng Jordan xuất phát như sau:

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_5$
$x_4 =$	6	1	2	3	0
$0 =$	7	1	1	1	-1
$x_6 =$	12	-1	-3	-4	0

$$f(x) = f(x^0) - \alpha_{0(m+1)}x_{m+1} + \dots + \alpha_{0,n}x_n$$

trong đó
$$\alpha_{0j} = \left(\sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \right) - c_j; \quad (\forall j: j = \overline{m+1, n}).$$

- Nếu ma trận hệ số $A = (a_{ij})$ không chứa ma trận đơn vị cấp m thì ta sử dụng phương pháp biến giả để tìm phương án ban đầu hoặc chỉ ra bài toán không có phương án.

Giả sử $x^0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ là phương án cơ sở nào đó của bài toán.

Để đơn giản ta giả thiết hạng của ma trận hệ số $A = (a_{ij})$ là m và $x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}$ là các thành phần cơ sở.

Khi đó x^0 có dạng:

$$x^0 = (b_{10}, b_{20}, \dots, b_{m0}, 0, \dots, 0)$$

và hệ (2) tương đương với hệ:

$$\begin{cases} x_1 = b_{10} - (b_{1(m+1)}x_{m+1} + \dots + b_{1n}x_n) \\ \dots \\ x_m = b_{m0} - (b_{m(m+1)}x_{m+1} + \dots + b_{mn}x_n) \end{cases} \quad (2')$$

Hàm mục tiêu f sẽ có dạng:

$$f(x) = b_{00} - (b_{0(m+1)}x_{m+1} + \dots + b_{0n}x_n)$$

trong đó

$$b_{00} = f(x^0) = \sum_{i=1}^m c_i b_{i0}$$

và

$$b_{0j} = \left(\sum_{i=1}^m c_i b_{ij} \right) - c_j; \quad (\forall j: j = \overline{m+1, n})$$

Bảng đơn hình xuất phát có dạng:

	1	$-x_{m+1}$	$-x_{m+2}$	$-x_n$
$x_1 =$	b_{10}	$b_{1(m+1)}$	$b_{1(m+2)}$	b_{1n}
$x_2 =$	b_{20}	$b_{2(m+1)}$	$b_{2(m+2)}$	b_{2n}
...
$x_m =$	b_{m0}	$b_{m(m+1)}$	$b_{m(m+2)}$	b_{mn}
$f =$	b_{00}	$b_{0(m+1)}$	$b_{0(m+2)}$	b_{0n}

Hàng cuối gọi là f - hàng, b_{00} là giá trị hàm f tương ứng $b_{0,1}; \dots; b_{0,n}$ dùng để kiểm tra tiêu chuẩn kết thúc.

3.3.1.3. Kiểm tra tiêu chuẩn kết thúc

Trường hợp 1.

$$b_{0j} \leq 0; (\forall j : j = \overline{m+1, n})$$

Ta có bảng đơn hình tối ưu. Phương án cơ sở $(b_{10}, b_{20}, \dots, b_{m0}, 0, \dots, 0)$ là phương án tối ưu, $f = b_{00}$ là giá trị tối ưu.

Trường hợp 2.

Tồn tại $k \in \{m+1, \dots, n\}$ và $(\forall i : i = \overline{1, m})$ thoả mãn

$$\alpha_{0,k} > 0 \text{ và } \alpha_{i,k} \leq 0$$

thì hàm mục tiêu không bị chặn dưới, tức bài toán không có lời giải.

Nếu không xảy ra một trong hai trường hợp trên thì sang bước d).

3.3.1.4. Lập bảng đơn hình tiếp theo

Xác định cột trụ $-x_q$ có $b_{0q} > 0$ (thông thường b_{0q} lớn nhất). Sau đó chọn hàng trụ $x_p =$ có:

$$b_{p0} / b_{pq} = \min \{b_{i0} / b_{iq} \mid b_{iq} > 0\}.$$

Thực hiện phép biến đổi Jordan cho ma trận (b_{ij}) với phần tử trụ b_{pq} ta được bảng đơn hình mới với biến x_q vào cơ sở thay cho biến x_p .

Quay lại bước c).

Định lý

Thuật toán đơn hình kết thúc sau hữu hạn bảng đơn hình.

Chứng minh.

Vì mỗi bảng đơn hình ứng với một phương án cơ sở tốt hơn phương án trước.

Mà số phương án cơ sở (điểm cực biên của tập phương án) là hữu hạn.

Vì vậy sau hữu hạn bảng đơn hình thuật toán phải kết thúc.

3.3.2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Giải bài toán $f(x) = x_1 - x_2 + 0x_3 - 2x_4 + 2x_5 - 3x_6 \longrightarrow \min$

với các điều kiện:

$$\begin{cases} x_1 & & + x_4 + x_5 - x_6 = 2 \\ & x_2 & + x_4 & + x_6 = 12 \\ & & x_3 + 2x_4 + 4x_5 + 3x_6 = 9 \end{cases}$$

và $x_j \geq 0; (\forall j : j = \overline{1, 6})$.

Giải.

Vì ma trận hệ số chứa ma trận đơn vị ứng với biến x_1 ; x_2 và x_3 nên ta có ngay phương án cơ sở ban đầu $x^0 = (2, 12, 9, 0, 0, 0)$.

Từ đó ta có:

$$\begin{cases} x_1 = 2 - (x_4 + x_5 - x_6) \\ x_2 = 12 - (x_4 + x_6) \\ x_3 = 9 - (2x_4 + 4x_5 + 3x_6) \end{cases}$$

và
$$f = b_{00} - (b_{04}x_4 + b_{05}x_5 + b_{06}x_6)$$

với $b_{00} = (c_1 \cdot b_{10} + c_2 \cdot b_{20} + c_3 \cdot b_{30}) = 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 12 + 0 \cdot 9 = -10$

$$b_{04} = (c_1 \cdot b_{11} + c_2 \cdot b_{12} + c_3 \cdot b_{13}) - c_4 = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot (-1) - (-2) = 2$$

$$b_{05} = (c_1 \cdot b_{21} + c_2 \cdot b_{22} + c_3 \cdot b_{23}) - c_5 = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 1 - 2 = -1$$

$$b_{06} = (c_1 \cdot b_{31} + c_2 \cdot b_{32} + c_3 \cdot b_{33}) - c_6 = 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 4 + 0 \cdot 3 - (-3) = 1.$$

Thay vào biểu thức của f ta có:

$$f = -10 - (2x_4 - x_5 + x_6)$$

Bảng đơn hình xuất phát sẽ là

	1	$-x_4$	$-x_5$	$-x_6$
$x_1 =$	2	1	1	-1
$x_2 =$	12	1	0	1
$x_3 =$	9	2	4	3
$f =$	-10	2	-1	1

Đây chưa phải là phương án tối ưu vì có phần tử dương ở f-hàng.

Ta xây dựng bảng đơn hình mới như sau:

- Tìm cột trụ: $\max\{2, -1, 1\} = 2$, vậy chọn cột $-x_4$ ứng với 2 làm cột trụ.

- Tìm hàng trụ: $\min\{2/1, 12/1, 9/2\} = 2/1$, vậy chọn hàng $x_1 =$ ứng với 2/1

làm hàng trụ .

Thực hiện phép biến đổi Jordan với phần tử trụ $b_{11} = 1$ (đóng khung) ta nhận được bảng đơn hình sau:

	1	$-x_1$	$-x_5$	$-x_6$
$x_4 =$	2	1	1	-1
$x_2 =$	10	-1	-1	2
$x_3 =$	5	-2	2	5
$f =$	-14	-2	-3	3

Đây chưa phải là phương án tối ưu vì có phần tử dương ở f-hàng.

Tương tự như trên ta thực hiện phép biến đổi Jordan với phần tử trụ $b_{33} = 5$ và được bảng đơn hình mới:

	1	$-x_1$	$-x_5$	$-x_3$
$x_4 =$	3	$3/5$	$7/5$	$1/5$
$x_2 =$	8	$-1/5$	$-9/5$	$-2/5$
$x_6 =$	1	$-2/5$	$2/5$	$1/5$
$f =$	-17	$-4/5$	$-21/5$	$-3/5$

Các phần tử ở f - hàng đều âm nên đây là bảng đơn hình tối ưu.

Phương án cơ sở tối ưu là: $x_1^* = x_3^* = x_5^* = 0, x_4^* = 3, x_2^* = 8, x_6^* = 1$.

và giá trị tối ưu là $f^* = -17$.

Ví dụ 2. Giải bài toán $f(x) = 2x_1 + 3x_2 \longrightarrow \max$

với các điều kiện:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = -4 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 + 3x_2 \leq 9 \end{cases}$$

và $x_j \geq 0; (\forall j : j = \overline{1,3})$.

Giải.

Đây là bài toán tìm max f. Ta giải bài toán min(-f), giữ nguyên các ràng buộc, bằng thuật toán tìm min như trên. Phương án tối ưu thu được cũng chính là phương án tối ưu của bài toán max. Trị tối ưu thu được là trị đối của trị tối ưu bài toán max.

i) Đưa về bài toán min chính tắc không âm:

$$g(x) = -f(x) = -2x_1 - 3x_2 \longrightarrow \min$$

với các điều kiện:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 & = 4 \\ x_1 + x_2 + x_4 & = 6 \\ x_1 + 3x_2 + x_5 & = 9 \end{cases}$$

và $x_j \geq 0; (\forall j: j = \overline{1,5})$.

- Ràng buộc thứ nhất đổi dấu để cho vế phải không âm.
- Đưa thêm biến bù x_4 và x_5 để đưa ràng buộc thứ 2 và 3 về dạng đẳng thức.

ii) Giải bài toán bằng phương pháp đơn hình:

Vì ma trận hệ số có ma trận đơn vị nên ta có bảng đơn hình xuất phát và các bảng kế tiếp sau:

	1	$-x_1$	$-x_2$
$x_3 =$	4	-1	2
$x_4 =$	6	1	1
$x_5 =$	9	1	3
$-f =$	0	2	3

	1	$-x_1$	$-x_3$
$x_2 =$	2	-1/2	1/2
$x_4 =$	4	3/2	-1/2
$x_5 =$	3	7/2	-3/2
$-f =$	-6	7/2	-3/2

	1	$-x_5$	$-x_3$
$x_2 =$	17/7		
$x_4 =$	19/7		
$x_1 =$	6/7		
$-f =$	-9	-1	0

Bài toán ban đầu (1); (2); (3) có phương án khi và chỉ khi bài toán giả có trị tối ưu bằng 0.

3.4.1.2 Giải bài toán bằng phương pháp đơn hình (Giai đoạn 2)

i) Trị tối ưu $g^* > 0$ thì bài toán gốc không có phương án

ii) Trị tối ưu $g^* = 0$ thì bài toán gốc có phương án

Nếu trong bảng đơn hình cuối cùng còn biến giả trong cơ sở thì dùng phép biến đổi Jordan để loại chúng ra khỏi cơ sở. Cuối cùng ta nhận được phương án cơ sở của bài toán gốc.

Lưu ý:

Trong quá trình giải bài toán giả, mỗi khi loại biến giả khỏi cơ sở ta loại chúng ra khỏi bảng đơn hình luôn.

3.4.2. Ví dụ

Ví dụ: Giải bài toán quy hoạch tuyến tính sau:

$$f(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \longrightarrow \max \quad (1)$$

với các điều kiện:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = 15 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 & = 20 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & = 10 \end{cases} \quad (2)$$

và $x_j \geq 0; (\forall j: j = \overline{1,4}). \quad (3)$

Giai đoạn 1:

Tìm phương án cơ sở ban đầu; ta thêm 2 biến giả $x'_1; x'_2$ và giải bài toán giả:

$$g(x) = x'_1 + x'_2 \longrightarrow \min \quad (1')$$

với các điều kiện:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x'_1 & = 15 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x'_2 & = 20 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & = 10 \end{cases} \quad (2')$$

và $x_j \geq 0; (\forall j: j = \overline{1,4}); x'_1 \geq 0; x'_2 \geq 0 \quad (3')$

Ta lập bảng đơn hình xuất phát

c_j cơ bản	Ân cơ bản	Phương án	0	0	0
			$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$
1	$x_1' =$	15	1	2	3
1	$x_2' =$	20	2	1	5
0	$x_4 =$	10	1	2	1
g =		35	3	3	8

$$b_{00} = (1).15 + 1.20 = 35$$

$$b_{01} = (1).1 + 1.2 - 0 = 3; \quad b_{02} = 2.(1) + 1.(1) - 0 = 3; \quad b_{03} = 3.(1) + 5.(1) - 0 = 8$$

Vì $\max\{3;3;8\} = 8$; $\min\left\{\frac{15}{3}; \frac{20}{5}; \frac{10}{1}\right\} = \frac{20}{5}$ ta chọn phần tử trụ là 5.

Đổi chỗ biến x_3 với biến x_2' .

Ta lập bảng đơn hình tiếp theo

c_j cơ bản	ân cơ bản	Phương án	0	0	1
			$-x_1$	$-x_2$	$-x_2'$
1	$x_1' =$	3	-1/5	7/5	-3/5
0	$x_3 =$	4	2/5	1/5	1/5
0	$x_4 =$	6	3/5	9/5	-1/5
g =		3	-1/5	7/5	

Vì $\max\left\{\frac{7}{5}\right\} = \frac{7}{5}$; $\min\left\{\frac{15}{7}; \frac{20}{1}; \frac{30}{9}\right\} = \frac{15}{7}$ ta chọn phần tử trụ là 7/5.

Đổi chỗ biến x_2 với biến x_1' . Ta lập bảng đơn hình tiếp theo

c_j cơ bản	Ân cơ bản	Phương án	0	1
			$-x_1$	x_1'
0	$x_2 =$	15/7	-1/7	5/7
0	$x_3 =$	25/7	3/7	-1/7
0	$x_4 =$	15/7	6/7	-9/5
g =		0	0	

Trị tối ưu $g^* = 0$ nên bài toán gốc có phương án cơ sở ban đầu.

Giai đoạn 2:

Đưa bài toán đã cho về bài toán quy hoạch tuyến tính dạng min

$$-f(x) = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 \longrightarrow \min \quad (1)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = 15 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 & = 20 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & = 10 \end{cases} \quad (2)$$

$$x_j \geq 0; (\forall j: j = \overline{1,4}). \quad (3)$$

Từ phương án cơ sở ban đầu của giai đoạn 1 ta tính b_{00} ; b_{01} như sau:

$$b_{00} = (-2) \cdot (15/7) - 3 \cdot (25/7) + 1 \cdot (15/7) = -90/7.$$

$$b_{01} = (-2) \cdot (-1/7) - 3(3/7) + 1 \cdot (6/7) - (-1) = 6/7.$$

Ta lập bảng đơn hình tiếp theo

c_j	Ấn	Phương	-1	0
cơ bản	cơ bản	án	$-x_1$	x_1'
-2	$x_2 =$	15/7	-1/7	5/7
-3	$x_3 =$	25/7	3/7	-1/7
1	$x_4 =$	15/7	6/7	-9/5
g =		-90/7	6/7	

Sau một bước biến đổi ta thu được bảng đơn hình tối ưu:

c_j	Ấn	Phương	-1
cơ bản	cơ bản	án	$-x_1$
-2	$x_2 =$	5/2	1/6
-3	$x_3 =$	5/2	-3/6
1	$x_4 =$	5/2	7/6
-f =		-15	-1

Cuối cùng ta nhận phương án tối ưu của bài toán gốc như sau:

$$x^* = \left(0; \frac{5}{2}; \frac{5}{2}; \frac{5}{2} \right) \text{ và trị tối ưu } f^* = 15.$$

Bài tập chương 3.

PHƯƠNG PHÁP ĐƠN HÌNH VÀ CÁC THUẬT TOÁN CỦA NÓ

Bài 1.

Giải bài toán quy hoạch tuyến tính

$$f(x) = 2x_1 - x_2 - 2x_4 + x_5 - 3x_6 \longrightarrow \min \quad (1)$$

với các điều kiện:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 & -x_5 + 2x_6 = 10 \\ 2x_1 & + x_3 & -2x_5 + 5x_6 = 5 \\ x_1 & & + x_4 + x_5 - x_6 = 2 \end{cases} \quad (2)$$

và $x_j \geq 0; (\forall j : j = \overline{1,6}).$ (3)

Bài 2.

Giải bài toán quy hoạch tuyến tính

$$f(x) = x_1 - x_2 - 2x_4 + 2x_5 - 3x_6 \longrightarrow \min \quad (1)$$

với các điều kiện:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 & -x_5 + 2x_6 = 10 \\ -2x_1 & + x_3 & + 2x_5 + 5x_6 = 5 \\ x_1 & & + x_4 + x_5 - x_6 = 2 \end{cases} \quad (2)$$

và

$x_j \geq 0; (\forall j : j = \overline{1,6}).$ (3)

Bài 3.

Giải bài toán quy hoạch tuyến tính

$$f(x) = 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_5 + 3x_6 \longrightarrow \min \quad (1)$$

với các điều kiện:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 & = 152 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 & + x_5 = 60 \\ 3x_1 & + x_3 & + x_6 = 36 \end{cases} \quad (2)$$

và $x_j \geq 0; (\forall j : j = \overline{1,6}).$ (3)

Bài 4.

Giải bài toán quy hoạch tuyến tính

$$f(x) = x_1 + x_2 + x_3 \longrightarrow \min \quad (1)$$

với các điều kiện:

$$\begin{cases} x_1 & -x_4 & -2x_6 & = 5 \\ x_2 & +2x_4 & -3x_5 + x_6 & = 3 \\ x_3 & +2x_4 - 5x_5 & + 6x_6 & = 5 \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{và} \quad x_j \geq 0; \quad \forall j : j = \overline{1,6}. \quad (3)$$

Bài 5.

Giải bài toán quy hoạch tuyến tính

$$f(x) = x_1 - x_2 + 2x_4 - 2x_5 + 3x_6 \longrightarrow \max \quad (1)$$

với các điều kiện:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 & -x_5 + 2x_6 = 10 \\ -2x_2 + x_3 & + 2x_5 + 5x_6 = 5 \\ x_2 & + x_4 + x_5 - x_6 = 2 \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{và} \quad x_j \geq 0; \quad (\forall j : j = \overline{1,6}). \quad (3)$$

Bài 6.

Giải bài toán quy hoạch tuyến tính

$$f(x) = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \rightarrow \max \quad (1)$$

với các điều kiện:

$$\begin{cases} 2.x_1 + 3.x_2 + 3.x_3 & \leq 150 \\ x_1 + 3.x_2 + 5.x_3 & \leq 120 \\ 4.x_1 + 8.x_2 + x_3 & \leq 100 \end{cases} \quad (2)$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \quad (3)$$

Bài 7.

Giải bài toán quy hoạch tuyến tính sau bằng phương pháp biến giả:

$$f(x) = 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \longrightarrow \min \quad (1)$$

với các điều kiện:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 7 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 5 \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{và} \quad x_j \geq 0; \quad (\forall j : j = \overline{1,4}). \quad (3)$$

Chương 4.

BÀI TOÁN ĐỐI NGẪU, THUẬT TOÁN ĐƠN HÌNH ĐỐI NGẪU

4.1. Bài toán đối ngẫu

4.1.1. Định nghĩa

4.1.1.1. Phát biểu bài toán đối ngẫu

Mỗi bài toán quy hoạch tuyến tính đều có một bài toán đối ngẫu.

Bài toán đầu gọi là bài toán xuất phát.

Bài toán xuất phát và bài toán đối ngẫu làm thành một cặp với nhau, có quan hệ chặt chẽ với nhau. Có được kết quả của bài toán này có thể suy ra được kết quả của bài toán kia. Do đó nếu việc nghiên cứu và giải bài toán xuất phát phức tạp thì ta có thể chuyển sang nghiên cứu và giải bài toán đối ngẫu.

Cho bài toán quy hoạch tuyến tính tổng quát (P):

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \min/(\max) \quad (1)$$

với điều kiện

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ \dots & \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pn}x_n &\leq b_p \end{aligned} \quad (2a)$$

$$\begin{aligned} a_{(p+1)1}x_1 + a_{(p+1)2}x_2 + \dots + a_{(p+1)n}x_n &= b_{p+1} \\ \dots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad (2b)$$

$$(p \leq m)$$

$$x_j \geq 0, \quad (\forall j : j = \overline{1, q}), \quad (q \leq n) \quad (3)$$

Bài toán đối ngẫu của bài toán (P), ký hiệu là bài toán (D), được định nghĩa như sau:

$$g(y) = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m \rightarrow \max/(\min) \quad (1')$$

với điều kiện

$$\begin{aligned} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m &\geq c_1 \\ \dots & \\ a_{1q}y_1 + a_{2q}y_2 + \dots + a_{mq}y_m &\geq c_q \end{aligned} \quad (2a')$$

$$a_{1(q+1)}y_1 + a_{2(q+1)}y_2 + \dots + a_{m(q+1)}y_m \geq c_{q+1}$$

..... (2b')

$$a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \geq c_n$$

$$y_i \geq 0, (\forall i : i = \overline{1, p}), (q \leq n) \quad (3')$$

Bài toán đối ngẫu được xây dựng theo các quy tắc sau:

i) Biến $y_i (\forall i : i = \overline{1, m})$ của bài toán đối ngẫu tương ứng với ràng buộc:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \left[\begin{array}{l} \leq \\ = \end{array} \right] b_i$$

của bài toán gốc.

Nếu ràng buộc có dạng bất đẳng thức thì $y_i \geq 0$.

ii) Ràng buộc

$$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \dots + a_{mj}y_m \left[\begin{array}{l} \geq \\ = \end{array} \right] c_j$$

của bài toán đối ngẫu tương ứng với biến x_j của bài toán gốc.

Nếu $x_j \geq 0$ thì ràng buộc có dạng bất đẳng thức.

iii) Bài toán gốc (P) cũng là bài toán đối ngẫu của bài toán (D). Như vậy tính đối ngẫu có tính tương hỗ nên (P) và (D) là cặp bài toán đối ngẫu. Trong cặp bài toán đối ngẫu một bài là bài toán max còn bài kia là bài toán min.

Bảng tổng hợp về cách xây dựng bài toán đối ngẫu

BÀI TOÁN (P)/ (D)	BÀI TOÁN (D) / (P)
$f(x) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n \rightarrow \min$	$g(y) = b_1y_1 + \dots + b_my_m \rightarrow \max$
$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \left[\begin{array}{l} \geq \\ \leq \\ = \end{array} \right] b_i$	$a_{1j}y_1 + \dots + a_{mj}y_m \left[\begin{array}{l} \leq \\ \geq \\ = \end{array} \right] c_j$
$x_i \left[\begin{array}{l} \geq 0 \\ \leq 0 \\ \text{tùy ý} \end{array} \right]$	$y_i \left[\begin{array}{l} \geq 0 \\ \leq 0 \\ \text{tùy ý} \end{array} \right]$

Ghi chú: \longleftrightarrow Cùng dấu
 \dashrightarrow Ngược dấu

4.1.1.2. Các ví dụ

Ví dụ 1.

Lập bài toán đối ngẫu của bài toán quy hoạch tuyến tính sau:

$$f(x) = x_1 - x_2 + 0x_3 - 2x_4 + 2x_5 - 3x_6 \rightarrow \min \quad (1)$$

với các điều kiện:

$$\begin{cases} x_1 & & + x_4 + x_5 - x_6 = 2 \\ & x_2 & + x_4 & + x_6 = 12 \\ & & x_3 + 2x_4 + 4x_5 + 3x_6 = 9 \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{và} \quad x_j \geq 0; (\forall j : j = \overline{1,6}). \quad (3)$$

Giải.

Bài toán đối ngẫu có 3 biến y_1, y_2, y_3 ứng với 3 ràng buộc của bài toán gốc và 6 ràng buộc bất đẳng thức ứng với 6 biến $x_j \geq 0; j = \overline{1,6}$; của bài toán gốc.

Bài toán đối ngẫu sẽ là:

$$g(y) = 2y_1 + 12y_2 + 9y_3 \rightarrow \max \quad (1')$$

với các điều kiện:

$$\begin{cases} y_1 & & \leq 1 \\ & y_2 & \leq -1 \\ & & y_3 \leq 0 \\ y_1 & + y_2 & + 2y_3 \leq -2 \\ y_1 & & + 4y_3 \leq 2 \\ -y_1 & + y_2 & + 3y_3 \leq -3 \end{cases} \quad (2')$$

$$\text{và} \quad y_i \geq 0; (\forall i : i = \overline{1,3}). \quad (3')$$

Ví dụ 2.

Lập bài toán đối ngẫu của bài toán quy hoạch tuyến tính sau:

$$f(x) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max \quad (1)$$

với các điều kiện:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = -4 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 + 3x_2 \leq 9 \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{và} \quad x_j \geq 0; (\forall i : i = \overline{1,3}). \quad (3)$$

Giải.

Bài toán đối ngẫu có 3 biến y_1, y_2, y_3 ứng với 3 ràng buộc của bài toán gốc và 3 ràng buộc bất đẳng thức ứng với 3 biến $x_j \geq 0; j = \overline{1,3}$; của bài toán gốc.

Bài toán đối ngẫu sẽ là:

$$g(y) = -4y_1 + 6y_2 + 9y_3 \rightarrow \min \quad (1')$$

với các điều kiện:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 \geq 2 \\ -2y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 3 \\ -y_1 \geq 0 \end{cases} \quad (2')$$

$$\text{và} \quad y_1 \in R; y_2 \geq 0; y_3 \geq 0. \quad (3')$$

4.1.2. Mối quan hệ giữa bài toán gốc và bài toán đối ngẫu

4.1.2.1. Các định lý đối ngẫu

Vì mọi bài toán quy hoạch tuyến tính đều có thể đưa về dạng chính tắc nên ta sẽ phát biểu và chứng minh nguyên lý đối ngẫu cho trường hợp bài toán quy hoạch tuyến tính chính tắc.

Cho cặp bài toán đối ngẫu dạng vector

$$(P) \quad c^T \cdot x \rightarrow \min$$

$$A \cdot x = b$$

$$x \geq 0$$

$$(D) \quad y \cdot b \rightarrow \max$$

$$y \cdot A \leq c$$

Trong đó:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m,n}$$

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$y = (y_1, \dots, y_n)$$

Bổ đề: Với mọi phương án x của bài toán (P) và phương án y của bài toán (D) ta có: $c^T \cdot x \geq y \cdot b$.

Chứng minh.

$$\text{Ta có: } c^T \cdot x \geq (y \cdot A) \cdot x = y \cdot (A \cdot x) = y \cdot b$$

4.1.2.2. Nguyên lý đối ngẫu 1

i) Nếu một trong hai bài toán có phương án tối ưu thì bài toán kia cũng có phương án tối ưu và giá trị tối ưu bằng nhau.

ii) Nếu hàm mục tiêu của một bài toán không bị chặn thì bài toán kia không có phương án.

Chứng minh.

i) Giả sử bài toán (P) có phương án tối $x^* = (x^*_B, 0)$ với ma trận cơ sở B .

$$\text{Ta có: } x^*_B = B^{-1}b$$

Theo phương pháp đơn hình, lập bảng đơn hình tối ưu với phương án cơ sở x^* ta nhận được: $c_B \cdot B^{-1} \cdot A - c \leq 0$

Từ đó suy ra: $y^* = c_B \cdot B^{-1}$ là phương án tối ưu của bài toán (D) vì: $y^* \cdot A \leq c$

$$\text{và } y^* \cdot b = c_B \cdot B^{-1} \cdot b = c_B \cdot x^*_B$$

ii) Hiển nhiên

4.1.2.3. Nguyên lý đối ngẫu 2

Phương án x của bài toán (P) và phương án y của bài toán (D) tối ưu khi và chỉ khi:

$$\text{i) } x_j > 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i = c_j$$

$$\text{ii) } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j > b \Rightarrow y_i = 0$$

Chứng minh.

Cho x và y là các phương án của bài toán (P) và (D). Ta có:

$$c^T \cdot x \geq y \cdot b \Leftrightarrow c^T \cdot x - y \cdot b \geq 0 \Leftrightarrow c^T \cdot x - y \cdot A \cdot x = 0 \Leftrightarrow (c^T - y \cdot A) \cdot x = 0$$

Từ đó suy ra (i) và (ii).

4.1.3. Tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu

4.1.3.1. Tìm nghiệm tối ưu của bài toán gốc qua nghiệm tối ưu của bài toán đối ngẫu

Giả sử ta đã giải được bài toán đối ngẫu. Khi đó:

a) Nếu bài toán đối ngẫu không có phương án tối ưu thì bài toán gốc cũng không có phương án tối ưu.

b) Bài toán đối ngẫu có phương án tối ưu: $y^0 = (y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0)$

Ta tiến hành như sau:

Bước 1. Nếu có $y_i^0 > 0$ thì ta có $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$ (a)

Bước 2. Thay $y^0 = (y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0)$ vào các biểu thức $\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i^0 - c_j$ ($j = \overline{1, n}$). Nếu với chỉ số j nào đó, biểu thức này khác 0 thì x_j tương ứng bằng 0 ($x_j = 0$) (b).

Từ các phương trình (a) ở bước 1 và kết quả (b) ở bước 2, ta tìm được nghiệm tối ưu của bài toán gốc.

4.1.3.2. Các ví dụ

Ví dụ 1.

Cho bài toán gốc

$$f(x) = 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 - 5x_5 \rightarrow \min \quad (1)$$

$$\begin{cases} x_1 - 6x_2 & - 2x_4 - 9x_5 = 32 \\ 2x_2 + x_3 + \frac{1}{2}x_4 + \frac{3}{2}x_5 = 30 \\ 3x_2 & + x_5 \leq 36 \end{cases} \quad (2)$$

$$x_j \geq 0; (j = \overline{1, 5}) \quad (3)$$

Bài toán đối ngẫu của nó là:

$$g(y) = 32y_1 + 30y_2 + 36y_3 \rightarrow \max \quad (1')$$

$$\begin{cases} y_1 & \leq 2 \\ -6y_1 + 2y_2 + 3y_3 & \leq 5 \\ y_2 & \leq 4 \\ -2y_1 + \frac{1}{2}y_2 & \leq 1 \\ -9y_1 + \frac{3}{2}y_2 + y_3 & \leq -5 \end{cases} \quad (2')$$

$$y_1, y_2 \text{ tùy ý}, y_3 \leq 0. \quad (3')$$

Bài toán gốc ta đã giải được phương án tối ưu là $x^0 = (32, 0, 30, 0, 0)$ với $f(x^0) = 184$.

Ta tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu.

Bước 1. $x_1^0 = 32 \neq 0 \Rightarrow y_1 = 2$; $x_3^0 = 30 \neq 0 \Rightarrow y_2 = 4$

Bước 2. Thay $x^0 = (32, 0, 30, 0, 0)$ vào biểu thức $2x_2 + x_5 - 36$ nhận được từ ràng buộc thứ 3 của bài toán gốc. Ta có $0 - 36 \neq 0$. Suy ra $y_3 = 0$.

Vậy phương án tối ưu là: $y^0 = (2, 4, 0)$ với $g(y^0) = 32.2 + 30.4 + 36.0 = 184 = f(x^0)$.

Ví dụ 2.

Ta có bài toán gốc: $f(x) = 52x_1 + 60x_2 + 36x_3 \rightarrow \min$ (1)

$$\begin{cases} x_1 & \geq -2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 & \geq 6 \\ 4x_1 + 2x_2 & \geq 4 \\ & x_2 \geq -2 \\ & x_3 \geq 3 \end{cases} \quad (2)$$

$$x_j \text{ tùy ý; } (\forall j : j = \overline{1,3}) \quad (3)$$

Bài toán đối ngẫu của nó là

$$g(y) = -2y_1 + 6y_2 + 4y_3 - 2y_4 + 3y_5 \rightarrow \max \quad (1')$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 4y_3 = 52 \\ 4y_2 + 2y_3 + y_4 = 60 \\ & 3y_2 + y_5 = 36 \end{cases} \quad (2')$$

$$y_i \geq 0; (\forall i : i = \overline{1,5}) \quad (3')$$

Bài toán này đã giải với phương án tối ưu là $y^0 = (0, \frac{34}{3}, \frac{22}{3}, 0, 2)$ hàm mục tiêu là $g(y^0) = \frac{310}{3}$.

Bây giờ ta tìm phương án tối ưu của bài toán gốc.

Bước 1. $y_2^0 = \frac{34}{3} \neq 0 \Rightarrow 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 6;$

$$y_3^0 = \frac{22}{3} \neq 0 \Rightarrow 4x_1 + 2x_2 = 4;$$

$$y_5^0 = 2 \neq 0 \Rightarrow x_3 = 3.$$

Bước 2. Mọi ràng buộc trong bài toán đối ngẫu đều là phương trình nên không cho ta điều gì về các x_j .

Vậy ta có hệ phương trình:

$$g(y) = (y, b) \quad \rightarrow \max \quad (1'')$$

với điều kiện

$$(A_j, y) \leq c_j; \quad (\forall j: j = \overline{1, n}) \quad (2'')$$

Giả sử y là phương án cơ sở của (D). Khi đó tồn tại các chỉ số:

$J_y \subset J = \{1, \dots, n\}; |J_y| = m, \{A_j; j \in J_y\}$ độc lập tuyến tính.

$$(A_j, y) = c_j; \quad \forall j \in J_y$$

Ký hiệu B là ma trận gồm toàn vec tơ $A_j, j \in J_y$.

Khi đó $x = (x_B, 0)$; với $x_B = B^{-1}b$, thỏa mãn điều kiện (2) của bài toán gốc, vì

$$A \cdot x = B \cdot x_B = B \cdot B^{-1}b = b.$$

Trong trường hợp này x gọi là giả phương án tương ứng với phương án y của bài toán đối ngẫu (D). Nếu $x \geq 0$ thì giả phương án x sẽ là phương án của bài toán (P) và phương án tối ưu theo nguyên lý đối ngẫu 1. Từ đó ta có:

* Dấu hiệu tối ưu:

Nếu mọi thành phần của giả phương án x tương ứng với phương án y không âm thì y là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu (D) và x là phương án tối ưu của bài toán gốc (P).

* Dấu hiệu không phương án.

Nếu giả phương án x có thành phần $x_j < 0$ ($j \in J_y$) và hàng tương ứng của ma trận $B^{-1} \cdot A$ không âm, thì bài toán đối ngẫu không bị chặn, tức bài toán gốc không có phương án.

Chứng minh.

$$\text{Với } \lambda > 0 \text{ đặt } y_\lambda = y - \lambda \cdot e_j \cdot B^{-1}$$

$$\text{Ta có: } y_\lambda \cdot A = y \cdot A - \lambda \cdot e_j \cdot B^{-1} \cdot A = c_B \cdot B^{-1} \cdot A - \lambda \cdot e_j \cdot B^{-1} \cdot A \leq c_B; \quad \forall \lambda \geq 0$$

Như vậy y_λ là phương án của bài toán đối ngẫu $\forall \lambda \geq 0$

Tiếp theo

$$(y_\lambda, b) = (y - \lambda \cdot e_j \cdot B^{-1}, b) = (y, b) - \lambda \cdot (e_j \cdot B^{-1}, b) = (y, b) - \lambda \cdot x_j$$

Và từ đó ta có:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} (y_\lambda, b) = +\infty.$$

Vậy hàm mục tiêu của bài toán đối ngẫu không bị chặn. Suy ra bài toán gốc không có phương án.

* Cải tiến phương án:

Nếu đối với mỗi thành phần $x_j < 0$ ($j \in J_y$) của giả phương án x , hàng tương ứng của ma trận $B^{-1}.A$ có phần tử âm, thì có thể tồn tại phương án tốt hơn của bài toán đối ngẫu.

Chứng minh.

Chọn thành phần $x_j < 0$ và $\lambda > 0$ thỏa $c_B.B^{-1}.A - c_B \leq \lambda.e_j.B^{-1}.A$

Đặt $y_\lambda = y.\lambda.e_j.B^{-1}$

Ta có: $(y_\lambda, b) = (y - \lambda.e_j.B^{-1}, b) = (y, b) - \lambda.(e_j.B^{-1}, b) = (y, b) - \lambda.x_j > (y, b)$

4.2.2. Thuật toán đơn hình đối ngẫu

Ta sẽ trình bày thuật toán theo ngôn ngữ bài toán gốc

4.2.2.1. Lập bảng đơn hình xuất phát

Giả sử đã biết phương án cơ sở y^0 của bài toán đối ngẫu. Để đơn giản giả sử:

$$x^0 = (b_{10}, \dots, b_{m0}, 0, \dots, 0)$$

là giả phương án x tương ứng của bài toán gốc.

Hệ (2) tương đương với hệ:

$$\begin{cases} x_1 = b_{10} - (b_{1(m+1)}.x_{m+1} + \dots + b_{1n}.x_n) \\ \dots \\ x_m = b_{m0} - (b_{m(m+1)}.x_{m+1} + \dots + b_{mn}.x_n) \end{cases}$$

Hàm mục tiêu f sẽ có dạng: $f(x) = b_{00} - (b_{0(m+1)}.x_{m+1} + \dots + b_{0n}.x_n)$

Trong đó: $b_{00} = f(x^0) = \sum_{i=1}^m c_i.b_{i0}$ và $b_{0j} = \sum_{i=1}^m c_i.b_{ij} - c_j, (\forall j : j = \overline{m+1, n})$.

Bảng đơn hình xuất phát có dạng:

	1	$-x_{m+1}$	$-x_{m+2}$...	$-x_n$
$x_1 =$	b_{10}	$b_{1(m+1)}$	$b_{1(m+2)}$...	b_{1n}
$x_2 =$	b_{20}	$b_{2(m+1)}$	$b_{2(m+2)}$...	b_{2n}
...
$x_m =$	b_{m0}	$b_{m(m+1)}$	$b_{m(m+2)}$...	b_{mn}
$f =$	b_{00}	$b_{0(m+1)}$	$b_{0(m+2)}$...	b_{0n}

Hàng cuối gọi là hàng f - hàng . b_{00} là giá trị hàm f tương ứng, $b_{0(m+1)}, \dots, b_{0,n}$ không dương. Khác với phương pháp đơn hình cột (b_{10}, \dots, b_{m0}) có thể có thành phần âm.

4.2.2.2. Kiểm tra tiêu chuẩn kết thúc

Trường hợp 1:

$$b_{i0} \geq 0 ; (\forall i : i = \overline{1, m})$$

Ta có bảng đơn hình tối ưu. Giả phương án cơ sở ($b_{10}, \dots, b_{m0}, 0, \dots, 0$) là phương án tối ưu, $f = b_{00}$ là giá trị tối ưu.

Trường hợp 2:

Tồn tại $i \in \{1, \dots, m\}$ thỏa

$$b_{i0} < 0 \text{ và } b_{ij} \geq 0, (\forall j : j = \overline{m+1, n})$$

Khi đó bài toán đối ngẫu không bị chặn, tức bài toán gốc không có phương án.

Nếu không xảy ra một trong hai trường hợp trên thì sang bước c)

4.2.2.3. Lập bảng đơn hình tiếp theo

Xác định hàng trụ ($x_p =$) có $b_{p,0} < 0$ (thông thường chọn $b_{p,0}$ nhỏ nhất). Sau đó chọn cột trụ $x_q =$ có:

$$b_{0,q} / b_{p,q} = \min \{b_{0,i} / b_{p,i} \mid b_{p,i} < 0\}$$

Thực hiện phép biến đổi Jordan cho ma trận (b_{ij}) với phần tử trụ $b_{p,q}$ ta được bảng đơn hình mới với biến x_q vào cơ sở thay cho biến x_p .

Quay lại bước b)

* Định lý: Thuật toán đơn hình đối ngẫu kết thúc sau hữu hạn bảng đơn hình.

Chứng minh.

Vì mỗi bảng đơn hình ứng với phương án cơ sở đối ngẫu tốt hơn phương án trước. Mà số phương án cơ sở đối ngẫu (điểm cực biên của tập phương án) là hữu hạn. Vì vậy sau hữu hạn bảng đơn hình thuật toán phải kết thúc.

Ví dụ 1: Giải bài toán $f(x) = x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 5x_5 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = -3 \\ -x_2 - x_3 + 2x_4 + 4x_5 \geq 18 \\ -x_2 - 3x_3 + 2x_5 \leq 10 \\ x_j \geq 0, (\forall j : j = \overline{1,5}) \end{cases}$$

Giải.

Thêm các biến phụ x_6 và x_7 , ta đưa bài toán về dạng chính tắc:

$$f = x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 & = -3 \\ -x_2 - x_3 + 2x_4 + 4x_5 - x_6 & = 18 \\ -x_2 - 3x_3 & + 2x_5 + x_7 = 10 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, (\forall j : j = \overline{1,7})$$

Giả phương án cơ sở ban đầu có các biến cơ sở : $x_1 = -3, x_6 = -18, x_7 = 10$.

Từ đó ta có:

$$\begin{cases} x_1 = -3 - (2x_2 - x_3 + x_4 - x_5) \\ x_6 = -18 - (-x_2 - x_3 + 2x_4 - 4x_5) \\ x_7 = 10 - (-x_2 - 3x_3 + 2x_5) \end{cases}$$

và $f(x) = b_{00} - (b_{02} \cdot x_2 + b_{03} \cdot x_3 + b_{04} \cdot x_4 + b_{05} \cdot x_5)$

với $b_{00} = 1 \cdot (-3) + 0 \cdot (-18) + 0 \cdot 10 = -3$

$$b_{02} = 1 \cdot 2 - 3 = -1$$

$$b_{03} = 1 \cdot (-1) - 2 = -3$$

$$b_{04} = 1 \cdot 1 - 3 = -2$$

$$b_{05} = 1 \cdot (-1) - 5 = -6$$

Thay vào biểu thức của f ta có:

$$f(x) = -3 - (-1 \cdot x_2 - 3x_3 - 2x_4 - 6x_5)$$

Bảng đơn hình xuất phát sẽ là:

	1	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$
$x_1 =$	-3	2	-1	1	-1
$x_6 =$	-18	1	1	-2	-4
$x_7 =$	10	-1	-3	0	2
f =	-3	-1	-3	-2	-6

Đây chưa phải là phương án tối ưu vì có phần tử âm ở cột 1. Ta xây dựng bảng đơn hình mới như sau:

- Tìm hàng trụ: $\min \{-3, -18\} = -18$, vậy chọn hàng x_6 ứng với -18 làm hàng trụ.

- Tìm cột trụ: $\min \{-2/-2, -6/-4\} = -2/-2$, vậy chọn cột $-x_4$ ứng với $-2/-2$ làm cột trụ.

Thực hiện phép biến đổi Jordan với phần tử trụ $b_{23} = -2$ (đóng khung) ta nhận được bảng đơn hình sau:

	1	$-x_2$	$-x_3$	$-x_6$	$-x_5$
$x_1 =$	-12	$5/2$	$-1/2$	$1/2$	-3
$x_4 =$	9	$-1/2$	$-1/2$	$-1/2$	2
$x_7 =$	10	-1	-3	0	2
$f =$	15	-2	-4	-1	-2

Đây chưa phải là phương án tối ưu vì có phần tử âm ở cột 1.

Tương tự như trên ta thực hiện phép biến đổi Jordan với phần tử trụ $b_{14} = -3$ và được bảng đơn hình mới

	1	$-x_2$	$-x_3$	$-x_6$	$-x_1$
$x_5 =$	4				
$x_4 =$	1				
$x_7 =$	2				
$f =$	23	$-11/3$	$-11/3$	$-4/3$	$-2/3$

Các phần tử ở cột 1 dương nên đây là bảng đơn hình tối ưu.

Phương án cơ sở tối ưu là:

$$x^*_1 = x^*_2 = x^*_3 = 0; x^*_4 = 1; x^*_5 = 4 (x^*_6 = 0, x^*_7 = 2)$$

Và giá trị tối ưu là: $f^* = 23$.

Phương án tối ưu (y_1, y_2, y_3) của bài toán đối ngẫu:

$$g(y) = -3y_1 + 18y_2 + 10y_3 \rightarrow \max \quad (1')$$

với các điều kiện:

$$\begin{cases} y_1 & \leq 1 \\ 2y_1 - y_2 - 3y_3 & \leq 2 \\ y_1 + 2y_2 & \leq 3 \\ -y_1 + 4y_2 + 2y_3 & \leq 2 \end{cases} \quad (2')$$

và $y_1 \in \mathbb{R}, y_2 \geq 0, y_3 \leq 0 \quad (3')$

là nghiệm hệ

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 = 3 \\ -y_1 + 4y_2 + 2y_3 = 5 \\ y_3 = 0 \end{cases}$$

	1	$-x_{m+1}$	$-x_{m+2}$	$-x_n$
$x_1 =$	$b_{1,0}$	$b_{1(m+1)}$	$b_{1(m+2)}$	$b_{1,n}$
$x_2 =$	$b_{2,0}$	$b_{2(m+1)}$	$b_{2(m+2)}$	$b_{2,n}$
.....
$x_m =$	$b_{m,0}$	$b_{m(m+1)}$	$b_{m(m+2)}$	$b_{m,n}$
$x_{n+1} =$	$b_{(m-1)0}$	$b_{(m+1)(m+1)}$	$b_{(m+1)(m+2)}$	$b_{m+1,n}$
$f =$	b_{00}	$b_{0,m+1}$	$b_{0,m+2}$	$b_{0,n}$

Đây chính là bảng đơn hình ứng với giả phương án $(x_1, x_2, \dots, x_m, x_{n+1})$.

Sau đó áp dụng phương pháp đơn hình đối ngẫu để tìm phương án tối ưu.

Ví dụ 2.

Giải bài toán sau bằng phương pháp đơn hình

$$f(x) = x_1 - x_2 - 2x_4 + 2x_5 - 3x_6 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_4 + x_5 - x_6 = 2 \\ x_2 + x_4 + x_6 = 12 \\ x_3 + 2x_4 + 4x_5 + 3x_6 = 9 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, (\forall j : j = \overline{1,6})$$

Theo kết quả chương trước ta nhận được bảng đơn hình tối ưu

	1	$-x_1$	$-x_5$	$-x_3$
$x_4 =$	3	$3/5$	$7/5$	$1/5$
$x_2 =$	8	$-1/5$	$-9/5$	$-2/5$
$x_6 =$	1	$-2/5$	$2/5$	$1/5$
$f =$	-17	$-4/5$	$-21/5$	$-3/5$

Với phương án cơ sở tối ưu là:

$$x^*_1 = x^*_3 = x^*_5 = 0, x^*_4 = 3, x^*_2 = 8, x^*_6 = 1$$

và giá trị tối ưu là $f^* = -17$

Bây giờ ta phải sử dụng thêm ràng buộc

$$x_1 \geq 1$$

vào hệ thống ràng buộc của bài toán. Để sử dụng kết quả giải trước đó ta thêm vào biến phụ x_7 với ràng buộc

$$x_1 - x_7 = 1$$

Từ đó ta có:

$$x_7 = -1 - (-x_1)$$

và bảng đơn hình xuất phát của giả phương án là:

	1	$-x_1$	$-x_5$	$-x_3$
$x_4 =$	3	$3/5$	$7/5$	$1/5$
$x_2 =$	8	$-1/5$	$-9/5$	$-2/5$
$x_6 =$	1	$-2/5$	$2/5$	$1/5$
$x_7 =$	-1	-1	0	0
$f =$	-17	$-4/5$	$-21/5$	$-3/5$

Áp dụng phương án đơn hình đối ngẫu ta thực hiện phép biến đổi Jordan quanh phần tử -1 đóng khung và nhận được bảng đơn hình tối ưu.

	1	$-x_7$	$-x_5$	$-x_3$
$x_4 =$	2,4			
$x_2 =$	8,2			
$x_6 =$	1,4			
$x_1 =$	1,0			
$f =$	-16,2	$-4/5$	$-21/5$	$-3/5$

Với phương án cơ sở tối ưu là:

$$x^*_3 = x^*_5 = 0, \quad x^*_1 = 1, \quad x^*_4 = 2,4; \quad x^*_2 = 8,2; \quad x^*_6 = 1,4$$

và giá trị tối ưu là: $f^* = -16,2$.

4.3. Ý nghĩa của bài toán đối ngẫu

4.3.1. Ý nghĩa toán học

1. Dùng cặp bài toán đối ngẫu để giải gần đúng theo ý nghĩa sau: Giải cả hai bài toán và nếu hiệu các giá trị tương ứng với hàm mục tiêu đủ nhỏ thì dừng lại và phương án cực biên thu được lấy làm nghiệm tối ưu gần đúng cho bài toán cần giải.

2. Khi giải được một trong hai bài toán đối ngẫu nhau, thì coi như đã giải được bài toán kia.

Vì vậy khi gặp bài toán quy hoạch tuyến tính khó giải, thì rất có thể bài toán đối ngẫu của nó dễ giải hơn.

Một trong những ví dụ thuộc loại này là bài toán quy hoạch tuyến tính: Tìm $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ thỏa mãn:

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min (c_j \geq 0; \forall j = \overline{1, n}) \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i; (\forall i : i = \overline{1, m}) \quad (2) \quad (\mathbf{P})_{\min}$$

$$x_j \geq 0; (\forall j : j = \overline{1, n}) \quad (3)$$

Muốn giải bài toán trên bằng thuật toán đơn hình ta thêm m ẩn số phụ để chính tắc hóa dạng của bài toán và sau đó lại phải thêm m ẩn số giả nữa để trở thành dạng chuẩn tắc thì mới lập được bảng đơn hình.

Thế nhưng nếu ta sử dụng bài toán đối ngẫu của nó là:

Tìm $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ thỏa mãn:

$$g(y) = \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \max \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j; (\forall j : j = \overline{1, n}) \quad (2) \quad (\mathbf{P})_{\min}$$

$$y_i \geq 0; (\forall i : i = \overline{1, m}) \quad (3)$$

Thì chỉ cần đưa thêm n ẩn số phụ để chính tắc hóa dạng của bài toán, ta được ngay dạng chuẩn tắc của nó (mà không phải dùng đến ẩn số giả để thành lập bài toán M là dạng chuẩn tắc của bài toán).

Ngoài ra, người ta còn chứng minh được rằng:

Định lý:

Trong bảng đơn hình tối ưu của bài toán đối ngẫu đối xứng $(\mathbf{D})_{\max}$ hệ các số kiểm tra $(\Delta_{m+1}^o, \Delta_{m+2}^o, \dots, \Delta_{m+n}^o)$ là phương án tối ưu của bài toán gốc $(\mathbf{P})_{\min}$ đã cho, tức là:

$$x^o = (\Delta_{m+1}^o, \Delta_{m+2}^o, \dots, \Delta_{m+n}^o)$$

Ví dụ:

Tìm $x = (x_1, x_2, x_3)$ thỏa mãn:

$$f(x) = x_1 + 3x_2 + 3x_3 \rightarrow \min \quad (1)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \geq 4 \\ 4x_3 \geq 1 \\ x_1 + x_3 \geq 1 \end{cases} \quad (2)$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0 \quad (3)$$

Giải:

Dựa vào bảng tổng hợp về cách xây dựng bài toán đối ngẫu ta lập bài toán đối ngẫu tương ứng là:

$$\begin{aligned} \text{Tìm } y \text{ thỏa mãn: } & \quad g(y) = 2y_1 + 4y_2 + y_3 + y_4 \rightarrow \max \quad (1') \\ & \quad \begin{cases} y_1 + 3y_2 + y_4 \leq 1 \\ 2y_1 + y_2 \leq 3 \\ y_2 + 4y_3 + y_4 \leq 3 \end{cases} \quad (2') \\ & \quad y_i \geq 0; (\forall i: i = \overline{1,4}) \quad (3') \end{aligned}$$

Thấy rằng muốn giải bài toán đã cho (bài toán gốc) bằng phương pháp đơn hình ta phải đưa thêm vào bài toán 4 ẩn số phụ và 4 ẩn số giả, thì mới đủ tạo nên dạng chuẩn tắc cho nó.

Nhưng với bài toán đối ngẫu của nó chỉ phải thêm 3 ẩn số phụ là đủ.

Thật vậy với thêm 3 ẩn số phụ y_5, y_6 và y_7 ta lập bảng đơn hình:

Hệ số	Ân cơ bản	Phương án	2	4	1	1	0	0	0
			y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7
0	y_5	1	1	3	0	1	1	0	0
0	y_6	3	2	1	0	0	0	1	0
0	y_7	3	0	1	4	1	0	0	1
		0	-2	-4	-1	-1	0	0	0
2	y_1	1	1	3	0	1	1	0	0
0	y_6	1	0	-5	0	-2	-2	1	0
0	y_7	0	0	1	4	1	0	0	1
		2	0	2	-1	1	2	0	0
2	y_1	1	1	3	0	1	1	0	0
0	y_6	1	0	-5	0	-2	-2	1	0
1	y_3	3/4	0	1/4	1	1/4	0	0	1/4
		11/4	0	9/4	0	5/4	2	0	1/4

Bảng đơn hình thứ 3, vì có $\Delta_i \geq 0; (\forall i: i = \overline{1,7})$ nên nó là bảng đơn hình tối ưu, trong đó theo định lý trên ta được:

* Phương án tối ưu của bài toán đã cho $x^0 = (2, 0, \frac{1}{4})$

Ví dụ 2: Xét bài toán khác đối với doanh nghiệp đó là bài toán mua nguyên liệu dự trữ cho việc sản xuất các sản phẩm nói trên.

Doanh nghiệp cần mua các loại nguyên liệu i ($\forall i: i = \overline{1, m}$) với nhu cầu b_i . Hãy lập kế hoạch mua các nguyên liệu sao cho:

a. Tổng số tiền mua nguyên liệu là nhỏ nhất

b. Số tiền chi phí cho mỗi đơn vị sản phẩm j , ($\forall j: j = \overline{1, n}$) không vượt quá giá trị của sản phẩm đó.

Gọi y_i , ($\forall i: i = \overline{1, m}$) là đơn giá của nguyên liệu loại i

Tổng tiền mua nguyên liệu: $g(y) = \sum_{i=1}^m b_i y_i$

Số tiền chi phí nguyên liệu cho sản phẩm j , ($\forall j: j = \overline{1, n}$): $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i$

Như vậy, bài toán lập kế hoạch mua nguyên liệu được phát biểu như sau:

Tìm $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ thỏa mãn;

$$g(y) = \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \min$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j, (\forall j: j = \overline{1, n})$$

$$y_i \geq 0; (\forall i: i = \overline{1, m})$$

Bài toán mua nguyên liệu

Rõ ràng, bài toán sản xuất và bài toán mua nguyên liệu là cặp bài toán đối ngẫu.

Gọi $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ và $y^0 = (y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0)$ lần lượt là phương án tối ưu của các bài toán sản xuất và bài toán mua nguyên liệu. Theo tính chất trong lý thuyết đối ngẫu ta có:

Nếu có $x_j^0 > 0$ thì ta có $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^0 = c_j$ nghĩa là: Nếu sản phẩm thứ j được sản xuất thì số tiền chi phí nguyên liệu cho một đơn vị sản phẩm bằng giá trị của sản phẩm đó.

Nếu có $y_j^0 > 0$ thì ta có $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^0 = b_i$ nghĩa là: loại nguyên liệu nào mua thì phải sử dụng hết.

Bài tập chương 4.

BÀI TOÁN ĐỐI NGẪU, THUẬT TOÁN ĐƠN HÌNH ĐỐI NGẪU

Bài 1.

Lập bài toán đối ngẫu của bài toán quy hoạch tuyến tính sau:

$$f(x) = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \rightarrow \min$$

với các điều kiện:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$$

và $x_j \geq 0; (\forall j : j = \overline{1,3}).$

Bài 2.

Lập bài toán đối ngẫu của bài toán quy hoạch tuyến tính sau:

$$f(x) = 4x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \max$$

với các điều kiện:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

và $x_j \geq 0; (\forall j : j = \overline{1,3}).$

Bài 3.

Lập bài toán đối ngẫu của bài toán quy hoạch tuyến tính sau:

$$f(x) = 2x_1 + x_2 - x_3 \rightarrow \min$$

với các điều kiện:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 \geq 2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 3 \end{cases}$$

và $x_1 \geq 0; x_2 \leq 0; x_3 \in R$

Bài 4.

Lập bài toán đối ngẫu của bài toán quy hoạch tuyến tính sau:

$$f(x) = 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \min$$

với các điều kiện:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \geq 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \leq 1 \end{cases}$$

và $x_1 \geq 0; x_2 \leq 0$

Bài 5.

Cho bài toán gốc $X = (x_1; x_2; x_3; x_4)$ thỏa mãn:

$$f(x) = -2x_1 + x_2 + x_4 \rightarrow \min$$

với các điều kiện:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \leq 15 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 27 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 \leq 18 \end{cases}$$

và $x_j \geq 0; (\forall j : j = \overline{1,4})$.

Lập bài toán đối ngẫu và tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu này.

Bài 6.

Cho bài toán gốc $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ thỏa mãn:

$$f(x) = -2x_1 + x_2 + x_4 \rightarrow \min \quad (1)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \leq 15 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 27 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 \leq 18 \end{cases} \quad (2) \quad (\mathbf{P})$$

$$x_j \geq 0; (\forall j : j = \overline{1,n}) \quad (3)$$

Lập bài toán đối ngẫu và tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu này.

Bài 7.

Cho bài toán gốc $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ thỏa mãn:

$$f(x) = 6x_1 + 10x_2 + 6x_4 \rightarrow \min \quad (1)$$

$$\begin{cases} x_3 \geq 1 \\ x_2 \geq -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 \geq 1 \\ -4x_2 \geq -3 \\ x_1 \geq 1 \\ x_1 - x_3 + x_4 \geq -1 \\ x_4 \geq -3 \end{cases} \quad (2)$$

$$x_j \text{ dấu bất kì, } (\forall j : j = \overline{1,4}) \quad (3)$$

Hãy lập và giải bài toán đối ngẫu và tìm phương án tối ưu X^0 của bài toán gốc đã cho

Bài 8.

Dùng phương pháp đối ngẫu giải bài toán quy hoạch tuyến tính.

Tìm $X = (x_1, x_2, x_3)$ thỏa mãn:

$$f(x) = 78x_1 + 85x_2 + 60x_3 + 2005 \rightarrow \min \quad (1)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 8 \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 \geq 7 \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 \geq 6 \end{cases} \quad (2)$$

$$x_j \geq 0; (\forall j : j = \overline{1,3}) \quad (3)$$

Chương 5. BÀI TOÁN VẬN TẢI, THUẬT TOÁN THỂ VỊ

5.1. Một số tính chất của bài toán vận tải

5.1.1. Thành lập bài toán

Có m điểm phát hàng, mỗi điểm được ký hiệu là A_i ($\forall i : i = \overline{1, m}$)

Có n điểm nhận hàng, mỗi điểm được ký hiệu là B_j ($\forall j : j = \overline{1, n}$)

Gọi a_i là khả năng cung cấp hàng của trạm phát A_i ($\forall i : i = \overline{1, m}$)

b_j là nhu cầu về hàng của trạm thu B_j ($\forall j : j = \overline{1, n}$)

c_{ij} là giá cước vận chuyển một đơn vị hàng hoá từ trạm phát

A_i đến trạm thu B_j , ($\forall (i, j) : i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$)

Lập phương án vận chuyển sao cho tổng chi phí vận chuyển là nhỏ nhất.

Tổng khả năng cung ứng hàng hoá của các trạm phát A_i ($\forall i : i = \overline{1, m}$) và tổng nhu cầu về hàng hoá của các trạm thu B_j , ($\forall j : j = \overline{1, n}$) có 3 trường hợp xảy ra:

Trường hợp 1: Cân bằng thu phát
$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

Trường hợp 2: Thu lớn hơn phát
$$\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$$

Trường hợp 3: Thu nhỏ hơn phát
$$\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j.$$

Lập mô hình bài toán vận tải chính tắc:

Gọi $x_{ij} \geq 0$ là lượng hàng hoá vận chuyển từ trạm phát A_i ($\forall i : i = \overline{1, m}$) đến trạm thu B_j ($\forall j : j = \overline{1, n}$). Khi đó bài toán vận tải được phát biểu như sau:

Tổng chi phí vận chuyển của phương án x_{ij} là:

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij} \rightarrow \min \quad (1)$$

$$\text{với điều kiện: } \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i; (\forall i : i = \overline{1, m}) \quad (2a)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j; (j = \overline{1, n}) \quad (2b)$$

$$x_{ij} \geq 0, (\forall (i, j) : i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}) \quad (3).$$

Một bộ (x_{ij}) thoả các điều kiện (2a), (2b) và (3) gọi là phương án vận chuyển.

Một phương án thoả cả (1) gọi là phương án vận chuyển tối ưu.

Bài toán vận tải thông thường sẽ được biểu diễn dưới dạng bảng vận tải sau:

$A_i \backslash B_j$	b_1	b_2	b_n
a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{1n} x_{1n}
a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	c_{2n} x_{2n}
			
a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	c_{mn} x_{mn}

5.1.2. Một số định nghĩa khác

- Một ô (i, j) mà $x_{ij} > 0$ gọi là ô sử dụng (ô chọn)

- Một phương án $x = (x_{ij})_{m \times n}$ mà tập các ô sử dụng là phương án cực biên của miền phương án D của bài toán vận tải.

Ta có các phương pháp xác định phương án cơ bản được xét ở mục sau:

- Một tập con các ô (i, j) của bảng vận tải dạng:

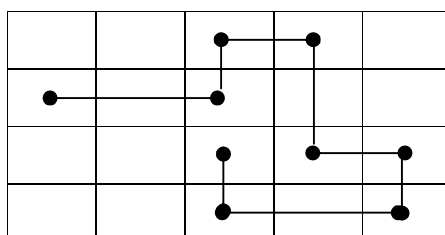
$$\hat{o}(i_1; j_1), \hat{o}(i_1; j_2), \hat{o}(i_2; j_2), \hat{o}(i_2; j_3), \dots, \hat{o}(i_r; j_s), \hat{o}(i_r; j_{s+1}),$$

hoặc $\hat{o}(i_1; j_1), \hat{o}(i_2; j_1), \hat{o}(i_2; j_2), \hat{o}(i_3; j_2), \dots, \hat{o}(i_r; j_s), \hat{o}(i_{r+1}; j_s),$

gọi là một dây chuyền trong bảng vận tải.

Mỗi cặp các ô liên nhau trong dây chuyền được xếp trong một hàng hoặc trong một cột. Không có 3 ô liên tiếp nào nằm trên cùng hàng hay trên cùng cột.

- Một dây chuyền được gọi là kín hay một chu trình nếu khi ô đầu và ô cuối của dây chuyền nằm trên cùng một hàng ($i_1 = i_r$) hoặc nằm trên cùng một cột ($j_1 = j_s$)



Chẳng hạn: Với bảng vận tải 4 hàng 5 cột này thì:

Tập các ô (2,1); ô (2,3), ô (1,3), ô (1, 4), ô (3,4), ô (3,5), ô (4,5), ô (4,3) và ô (3,3) là một dây chuyền.

Gọi $G = \{(i,j) | x_{ij} > 0\}$, N là số phần tử của tập G (cỡ của tập G).

- Một phương án x của bài toán được gọi là phương án không suy biến (suy thoái) nếu $N = m + n - 1$. Phương án x gọi là phương án suy biến nếu $N < m + n - 1$

Chú ý: (Cách khắc phục phương án suy biến)

Trong trường hợp x bị suy biến, ta bổ sung cho tập G của x thêm một số ô, chọn trong số các ô không sử dụng, gọi là các “ô chọn 0” (vì các ô (i, j) này đều có

$x_{ij} = 0$), sao cho phương án cơ bản x đủ $m + n - 1$ ô không vòng. Các ô không chọn gọi là các ô loại của phương án.

5.1.3. Các tính chất

5.1.3.1 Tính chất 1

Bài toán vận tải cân bằng thu phát: $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$

$$f = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij} \rightarrow \min \quad (1)$$

$$\text{với điều kiện: } \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i; (i = \overline{1, m}) \quad (2a) \quad (*)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j; (j = \overline{1, n}) \quad (2b)$$

$$x_{ij} \geq 0; (\forall (i, j): i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}). \quad (3).$$

bao giờ cũng có phương án tối ưu.

Chứng minh.

$$\text{- Miền phương án của bài toán } D \neq \emptyset \quad (i)$$

Thật vậy;

$$\text{Ta đặt: } x_{ij} = \frac{a_i b_j}{P}; i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$$

$$\text{với } P = \sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

$$\Rightarrow x_{ij} \geq 0; (\forall (i, j): i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}) \text{ (vì } a_i, b_j \text{ và } P > 0)$$

Vậy $x = (x_{ij})_{mn}$ thỏa mãn điều kiện (1)

$$\text{Mặt khác} \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n \frac{a_i b_j}{P} = \frac{a_i}{P} \sum_{j=1}^n b_j = a_i; (\forall i : i = \overline{1, m}) \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j; (\forall j : j = \overline{1, n}) \end{cases}$$

Vậy $x = (x_{ij})_{mn}$ thỏa mãn điều kiện (2a) và (2b).

$$\Rightarrow x \in D \Rightarrow D \neq \emptyset.$$

- Hàm mục tiêu $f(x)$ bị chặn (ii)

Thật vậy, đặt:

$$c' = \min c_{ij}; (\forall (i, j) : i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n})$$

$$c'' = \max c_{ij}; (\forall (i, j) : i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n})$$

Ta có:

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \geq c' \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = c' \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n x_{ij} \right) = c' \sum_{i=1}^m a_i = c' P$$

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \leq c'' \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = c'' P$$

$$\Rightarrow c' P \leq f(x) \leq c'' P \Rightarrow f(x) \text{ bị chặn.}$$

Từ (i) và (ii) suy ra bài toán trên luôn có phương án tối ưu.

5.1.3.2 Tính chất 2

Ma trận hệ số A của hệ phương ràng buộc (*) có $\text{rank}(A) = m + n - 1$. Do đó hệ (*) chỉ có $(m + n - 1)$ phương trình độc lập tuyến tính. Vậy phương án cực biên có nhiều nhất $m + n - 1$ thành phần dương. Nói cách khác số lượng $x_{ij} > 0$ bằng

$m + n - 1$. Số còn lại đều bằng 0.

5.1.3.3 Tính chất 3 (Về vòng các ô trong bảng vận tải)

a) Định lý:

Nếu bảng vận tải có m hàng n cột, thì cỡ của tập hợp các ô có thể không có vòng. Lớn nhất là $m + n - 1$ ô.

Ở đây cỡ của tập hợp là số lượng phần tử của tập hợp (nếu là tập hữu hạn).

b) Hệ quả:

Nếu cỡ của tập hợp các ô trong bảng vận tải lớn hơn $m + n - 1$ ô thì tập ấy sẽ có vòng.

- Ký hiệu N là cỡ của một tập hợp các ô trong bảng vận tải.

Người ta chứng minh được rằng: nếu $N - (m + n - 1) = k$ thì tập hợp đó k vòng.

- Gọi E_0 là tập hợp $m + n - 1$ ô không có vòng trong bảng vận tải (m hàng, n cột). Bây giờ ta thêm vào E_0 một ô (i, j) (tất nhiên không phải của E_0), ta được một tập $m + n$ ô là $E_0 \cup \{\text{ô}(i, j)\}$, theo hệ quả, có một vòng duy nhất.

Gọi V là vòng các ô trong tập $E_0 \cup \{\text{ô}(i, j)\}$, . Khi đó nếu loại bỏ của V một ô, giả sử là ô (k, r) , thì tập E_1 gồm $m + n - 1$ ô còn lại không có vòng.

Chứng minh.

Giả sử tập E_1 còn một vòng, ký hiệu là V_1 . Khi đó:

- Nếu ô (k, r) là ô (i, j) vừa được thêm vào tập E_0 , thì $E_1 \equiv E_0$. Suy ra E_1 không có vòng V_1 .

- Nếu ô $(k, r) \neq \text{ô}(i, j)$ thì vòng V_1 rõ ràng là không chứa ô (k, r) khác với V và nằm trong E_0 . Điều đó mâu thuẫn với giả thiết là E_0 không có vòng.

Vậy E_1 không có vòng.

5.2. Một số phương pháp xây dựng phương án cực biên ban đầu

Bài toán vận tải là bài toán quy hoạch tuyến tính nên có thể giải bằng phương pháp đơn hình. Ngoài ra, còn có các phương pháp giải khác hiệu quả và đơn giản hơn. Các bước giải như sau:

Lập phương án ban đầu

Kiểm tra tiêu chuẩn tối ưu

Nếu chưa tối ưu thì tìm phương án tốt hơn cho đến khi tìm được phương án tối ưu.

Có 3 phương pháp lập phương án ban đầu. Chú ý rằng ma trận các hệ số A không chứa ma trận đơn vị.

5.2.1. Phương pháp góc Tây Bắc

5.2.1.1. Nội dung phương pháp

Xuất phát ở góc Tây bắc, tức ô $(1,1)$ tiến dần xuống ô ở góc Đông nam, tức ô (m,n) . Trên đường đi gặp ô nào ta phân phối cho ô đó một lượng hàng lớn nhất có thể được, để đảm bảo điều kiện cân bằng theo hàng và cột. Sau khi phân phối hết

hàng thì dừng. Kiểm tra xem tổng số ô chọn (tức ô có $x_{ij} > 0$) có bằng $m+n-1$ hay không. Nếu đúng thì là phương án ban đầu.

5.2.1.2. Ví dụ

Lập phương án ban đầu của bài toán vận tải sau:

$B_j \backslash A_i$	$b_1 = 5$	$b_2 = 3$	$b_3 = 4$
$a_1 = 4$	0,8	0,6	0,3
$a_2 = 8$	0,8	1	0,8

Giải.

Xuất phát từ ô (1, 1) ta phân phối cho x_{11} lượng hàng tối đa là:

$$x_{11} = \min\{a_1, b_1\} = \min\{4, 5\} = 4.$$

$B_j \backslash A_i$	$b_1 = 5$	$b_2 = 3$	$b_3 = 4$
$a_1 = 4$	0,8 4	0,6	0,3
$a_2 = 8$	0,8 1	1 3	0,8 4

Ghi vào ô (1, 1), vì $a_1 = 4$ đã phân hết vào ô (1, 1) nên ta không có hàng để phân cho các ô khác cùng hàng. Tiếp tục đi xuống ta phân 1 vào ô (2, 1). Đi sang phải ta phân 3 vào ô (2, 2) và 4 vào ô (2, 3). Đến đây ta đã phân phối hết số hàng. Các ô trống có $x_{ij} = 0$

Số ô chọn là: $m+n-1=3+2-1=4$, nên đây là phương án cơ sở ban đầu.

Tổng chi phí là: $f = 0,8.4 + 0,8.1 + 1.3 + 0,8.4 = 10,2$.

5.2.2. Phương pháp chi phí nhỏ nhất

Phương pháp góc Tây bắc không tính đến hệ số c_{ij} của hàm mục tiêu. Do đó phương án ban đầu thường cách xa phương án tối ưu. Phương pháp chi phí nhỏ nhất khắc phục nhược điểm này.

5.2.2.1. Nội dung phương pháp:

Ta chọn $\hat{o}(k,r)$ làm ô sử dụng đầu tiên sao cho:

$$c_{k,r} = \min c_{ij}, (\forall (i,j): i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}).$$
 (Nếu có nhiều ô đạt cực tiểu bằng nhau thì

ta bố trí theo quy tắc tự vững (hay bố trí theo hàng 1, 2, 3, ...)).

Ta phân vào đó một lượng hàng x_{kr} lớn nhất có thể được:

* Nếu $a_k < b_r$ thì $x_{kr} = a_k$. Trạm phát A_k phát hết hàng nên thỏa mãn. Các ô (k, j) , $\forall j \neq r$. Bảng vận tải lúc này thực tế còn $m - 1$ hàng và n cột được sử dụng.

* Nếu $a_k > b_r$ thì $x_{kr} = b_r$. Trạm thu B_r nhận đủ hàng nên thỏa mãn. Tương tự như trên các ô trên cột thứ r không còn sử dụng được. Bảng vận tải lúc này thực tế còn m hàng $n - 1$ cột được sử dụng.

* Nếu $a_k = b_r$ thì $x_{kr} = a_k$ hoặc b_r . Hai trạm A_k và B_r đều được thỏa mãn. Bảng vận tải lúc này thực tế còn lại $m - 1$ hàng và $n - 1$ cột.

- Đối với các “bảng vận tải còn lại” (tức là bảng vận tải sau khi đã loại bỏ hàng, cột không sử dụng) ta cũng tiến hành chọn ô sử dụng và phân phối hàng vận chuyển giống như nguyên tắc trên.

Tiếp tục quá trình này cho đến khi các trạm thu, phát trên bảng vận tải đều được thỏa mãn. Cuối cùng ta thu được X_0 .

Định lý.

Phương án X_0 tìm được theo phương pháp chi phí nhỏ nhất là một phương án cơ bản.

Chứng minh.

Ta có: X_0 tìm được là một phương án vì: $x_{ij} \geq 0$; $(\forall (i,j): i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n})$

$$\text{và} \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \forall i = \overline{1,m}; \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \forall j = \overline{1,n}.$$

Hơn nữa, X_0 là một phương án cơ bản (vì theo phương pháp trạm thỏa mãn, ta loại bỏ hàng cột của trạm thỏa mãn, nên ô đầu và ô cuối của một dãy chuyển các ô sử dụng trong bảng vận tải không có cơ hội nằm cùng hàng hoặc cùng cột, tức là tập các ô sử dụng không có vòng).

5.2.2.2. Ví dụ

Lập phương án ban đầu của bài toán vận tải ở ví dụ 5.2.1.2. bằng phương pháp chi phí nhỏ nhất.

Giải:

Đầu tiên ta chọn ô (1,3) có chi phí $c_{13} = 0,3$ nhỏ nhất, phân phối tối đa vào ô này ta có:

$$x_{13} = \min\{a_1; b_3\} = \min\{4; 4\} = 4.$$

B_j	$b_1 = 5$	$b_2 = 3$	$b_3 = 4$
A_i			
$a_1 = 4$	0,8	0,6	0,3 4
$a_2 = 8$	0,8 5	1 3	0,8

Loại các ô hàng 1, cột 3 vì a_1 và b_3 đã được phân phối hết hàng.

Trong 2 ô còn lại (2,1) và (2,2) chọn ô (2,1), phân 5 vào ô đó. Cuối cùng phân 3 vào ô (2,2). Tổng chi phí là: $f = 0,3.4 + 0,8.5 + 1.3 = 8,2$.

5.2.3. Phương pháp Foghen

Trong phương pháp chi phí nhỏ nhất ta đã tính đến giá cả vận chuyển c_{ij} nhưng chưa chú ý đến sự chênh lệch về giá cả.

Vì thế có thể xảy ra trường hợp bước trước thì tốt nhưng bước sau thì lại xấu (vì rơi vào ô có chi phí cao).

Phương pháp Foghen khắc phục nhược điểm này và cho kết quả tốt hơn.

5.2.3.1. Nội dung phương pháp

- Trên mỗi hàng và mỗi cột chọn c_{ij} nhỏ nhất và nhỏ thứ hai. Lấy hiệu số của chúng rồi ghi vào bên phải và bên dưới của chúng.

Tìm số lớn nhất trong các hiệu số đó.

- Phân phối hàng hoá cho hàng hoặc cột có hiệu số lớn nhất trước và phân vào ô có c_{ij} nhỏ nhất trên hàng hoặc cột tương ứng.

Lượng hàng phân cho ô này là lượng hàng lớn nhất có thể được trên cơ sở đảm bảo cân bằng theo hàng và theo cột.

- Sau khi thoả mãn hàng hoặc cột thì ta đánh dấu (-) vào các ô loại của hàng hay cột đó.

- Tiếp tục xét các hiệu số của các c_{ij} còn lại, sửa lại các hiệu số đó nếu cần và tiếp tục làm như trên cho đến khi thoả mãn hết các hàng và cột thì dừng.

5.2.3.2 Ví dụ

Lập phương án ban đầu của bài toán vận tải ở ví dụ 5.2.1.2. bằng phương pháp Foghen.

Giải:

Xét các hiệu các c_{ij} nhỏ nhất và nhỏ thứ hai trên các hàng ghi bên phải và trên các cột ghi dưới mỗi cột có nhận thấy 0,5 là lớn nhất nên ta chọn cột thứ 3 và trên cột đó ta chọn ô (1, 3) có chi phí nhỏ nhất để phân phối hàng cực đại vào ô đó là: $x_{13}=4$. Như vậy hàng 1 và cột 3 đã bảo hoà.

$A_i \backslash B_j$	$b_1=5$	$b_2=3$	$b_3=4$	
$a_1=4$	0,8 -	0,6 -	0,3 4	0,3
$a_2=8$	0,8 5	1 3	0,8 -	0
	0	0,4	0,5	

Tiếp theo ta phân phối vào ô (2, 1) lượng hàng $x_{12}=5$ và ô (2, 2) lượng hàng $x_{22}=3$.

Tổng chi phí là: $f = 0,3.4 + 0,8.5 + 1.3 = 8,2$.

5.3. Thuật toán thế vị

5.3.1. Nội dung thuật toán thế vị

5.3.1.1. Xây dựng phương án ban đầu

Ta xây dựng phương án ban đầu bằng một trong ba phương pháp góc Tây Bắc, phương pháp chi phí nhỏ nhất và phương pháp Foghen.

Nếu cần bổ sung thêm ô chọn ($x_{ij} = 0$) để có $m + n - 1$ ô chọn.

5.3.1.2. Tìm hệ thống thế vị ($u_i; v_j$)

Ta tìm hệ thống thế vị (u_i, v_j) bằng cách giải hệ phương trình:

$$u_i + v_j = c_{ij}; \quad \forall (i, j)$$

là ô chọn như sau:

+ Gán cho thế vị u_i dòng i nào đó một giá trị bất kỳ.

(Thường là $u_1 = 0$ cho đơn giản).

+ Từ đó tính các thế vị u_i và v_j truy hồi như sau:

$$v_i = c_{ij} - u_i$$

$$u_i = c_{ij} - v_j$$

$\forall (i, j), (\forall (i, j): i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n})$ ứng với các ô chọn.

5.3.1.3 Kiểm tra tiêu chuẩn tối ưu.

Tính $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ với mọi ô loại (i, j) .

Nếu $\Delta_{ij} \leq 0$ với mọi ô loại (i, j) thì đó là bảng vận tải tối ưu.

Ngược lại, nếu $\Delta_{ij} > 0$ thì sang bước tiếp theo.

5.3.1.4 Điều chỉnh phương án.

Chọn ô loại (k, h) có $\Delta_{kh} > 0$ lớn nhất:

$$\Delta_{kh} = \max\{\Delta_{ij} / (i, j) \text{ ô loại}\}$$

Ô (k, h) cùng với các ô chọn tạo thành một vòng duy nhất, ký hiệu là C_{kh} .

Tiếp theo đánh dấu (+) cho ô (k, h) , các ô kế tiếp đánh dấu (-) rồi (+) xen kẽ.

Vì số ô của vòng là chẵn nên hai ô kề nhau cũng trái dấu nhau.

Tìm $q = \min\{x_{ij} / (i, j) \in C_{kh}; (i, j) \text{ đánh dấu } (-)\}$.

Tiếp theo ta hiệu chỉnh x_{ij} trên các ô trong vòng C_{kh} như sau:

$$x_{ij} (\text{mới}) = x_{ij} (\text{cũ}) + q \text{ với mọi ô } (i, j) \text{ có dấu } (+)$$

$$x_{ij} (\text{mới}) = x_{ij} (\text{cũ}) - q \text{ với mọi ô } (i, j) \text{ có dấu } (-).$$

Ô (k, h) trở thành ô chọn mới.

Ta loại một ô chọn cũ (có $x_{ij} = 0$) trên vòng C_{kh} ra khỏi tập các ô chọn.

Quay về bước b) tìm hệ thống thế vị mới.

5.3.2. Ví dụ

Cho bài toán vận tải dạng bảng sau:

$A_i \backslash B_j$	b_1	b_2	b_3
a_1 100	5	4	1
a_2 50	2	6	3
a_3 50	10	7	2

Tìm phương án tối ưu của bài toán trên.

Giải:

Bước 1:

a) Xây dựng phương án ban đầu:

Bằng phương pháp góc Tây - Bắc ta có phương án ban đầu cho ở bảng sau:

$A_i \backslash B_j$	b_1 75	b_2 60	b_3 65	u_i
a_1 100	5 75	4 25	1	$u_1=0$
a_2 50	2	6 35	3 15	$u_2=2$
a_3 50	10	7	2 50	$u_3=1$
v_j	$v_1=5$	$v_2=4$	$v_3=1$	

b₁) Tìm hệ thống thế vị (u_i, v_j) :

- Đặt thế vị của hàng 1 là: $u_1 = 0$.

- Trên hàng 1 ta có 2 ô chọn (1, 1) và (1, 2). Thế vị của cột 1 và 2 được tính:

$$v_1 = c_{11} - u_1 = 5 - 0 = 5$$

$$v_2 = c_{12} - u_1 = 4 - 0 = 4$$

- Trên cột 2 ta có ô chọn (2,2) với hàng 2 chưa xác định thế vị. Thế vị của hàng 2 được tính:

$$u_2 = c_{22} - v_2 = 6 - 4 = 2.$$

- Trên hàng 2 ta có 2 ô chọn (2, 3) với cột 3 chưa xác định thế vị. Thế vị của cột 3 được tính là:

$$v_3 = c_{23} - u_2 = 3 - 2 = 1.$$

- Trên cột 3 ta có ô chọn (3, 3) với hàng 3 chưa xác định thế vị. Thế vị của hàng 3 được tính:

$$u_3 = c_{33} - v_3 = 2 - 1 = 1.$$

c₁) Kiểm tra tiêu chuẩn tối ưu.

Tính: $\Delta_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 1 - 1 = 0$

$$\Delta_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = 2 + 5 - 2 = 5$$

$$\Delta_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = 1 + 5 - 10 = -4$$

$$\Delta_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = 1 + 4 - 7 = -2$$

Vì $\Delta_{21} > 0$ nên đây chưa là phương án tối ưu. Ta sang bước d).

d) Điều chỉnh phương án.

Ta xác định ô (2, 1) làm ô chọn mới, vì đây là ô có $\Delta_{21} = 5 > 0$ duy nhất.

Ô (2, 1) cùng với các ô chọn tạo thành vòng được đánh dấu như sau:

$$C_{21} = \{(2,1):(+); (1,1):(-); (1,2):(+); (2,2):(-)\}.$$

$B_j \backslash A_i$	b_1	b_2	b_3	u_i
a_1 100	5 75	4 25	1	$u_1=0$
a_2 50	2 35	6 15	3	$u_2=2$
a_3 50	10	7	2 50	$u_3=1$
v_j	$v_1 = 5$	$v_2 = 4$	$v_3 = 1$	

Xác định $q = \min\{75, 35\} = 35$. Ta sang bước 2.

Bước 2:

a) Xây dựng phương án tiếp theo:

Ta điều chỉnh và có phương án như sau:

$B_j \backslash A_i$	b_1	b_2	b_3	u_i
a_1 100	5 40	4 60	1	$u_1 = 0$
a_2 50	2 35	6 15	3	$u_2 = -3$
a_3 50	10	7	2 50	$u_3 = -4$
v_j	$v_1 = 5$	$v_2 = 4$	$v_3 = 6$	

b₂) Tìm hệ thống thế vị (u_i, v_j) :

- Đặt thế vị của hàng 1 là: $u_1=0$. Tính truy hồi như bước trước ta được:

- Trên hàng 1 ta có 2 ô chọn (1, 1) và (1, 2). Thế vị của cột 1 và 2 được tính:

$$v_1 = c_{11} - u_1 = 5 - 0 = 5$$

$$v_2 = c_{12} - u_1 = 4 - 0 = 4$$

- Trên cột 1 ta có ô chọn (2,1) với hàng 2 chưa xác định thế vị. Thế vị của hàng 2 được tính:

$$u_2 = c_{21} - v_1 = 2 - 5 = -3.$$

- Trên hàng 2 ta có 1 ô chọn (2, 3) với cột 3 chưa xác định thế vị. Thế vị của cột 3 được tính là:

$$v_3 = c_{23} - u_2 = 3 - (-3) = 6.$$

- Trên cột 3 ta có ô chọn (3, 3) với hàng 3 chưa xác định thế vị. Thế vị của hàng 3 được tính:

$$u_3 = c_{33} - v_3 = 2 - 6 = -4.$$

Sau khi tính hệ thống thế vị thu được ghi ở bảng trên.

Ta sang bước c₁) như sau:

c₂) Kiểm tra tiêu chuẩn tối ưu.

Tính:

$$\Delta_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 6 - 1 = 5$$

$$\Delta_{22} = u_2 + v_2 - c_{22} = -3 + 4 - 6 = -5$$

$$\Delta_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = -4 + 5 - 10 = -9$$

$$\Delta_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = -4 + 4 - 7 = -7$$

Vì $\Delta_{13} = 5 > 0$ nên đây chưa là phương án tối ưu. Ta điều chỉnh phương án.

d₂) Điều chỉnh phương án.

Ta xác định ô (1, 3) làm ô chọn mới, vì đây là ô có $\Delta_{13} = 5 > 0$ duy nhất.

Ô (1, 3) cùng với các ô chọn tạo thành vòng được đánh dấu như sau:

$$C_{13} = \{(1,3):(+); (2,3):(-); (2,1):(+); (1,1):(-)\}.$$

Xác định $q = \min\{15,40\} = 15$. Ta sang bước 3.

Bước 3:

a₃) Xây dựng phương án tiếp theo:

Ta điều chỉnh và có phương án như sau:

$A_i \backslash B_j$	b_1 75	b_2 60	b_3 65	u_i
a_1 100	5 25	4 60	1 15	$u_1 = 0$
a_2 50	2 50	6	3	$u_2 = -3$
a_3 50	10	7	2 50	$u_3 = 1$
v_j	$v_1 = 5$	$v_2 = 4$	$v_3 = 1$	

b₃) Tìm hệ thống thế vị (u_i, v_j) :

- Đặt thế vị của hàng 1 là: $u_1 = 0$.

- Tính truy hồi như bước trước ta được:

- Trên hàng 1 ta có 2 ô chọn (1, 1) và (1, 2). Thế vị của cột 1 và 2 được tính:

$$v_1 = c_{11} - u_1 = 5 - 0 = 5$$

$$v_2 = c_{12} - u_1 = 4 - 0 = 4$$

- Trên cột 1 ta có ô chọn (2,1) với hàng 2 chưa xác định thế vị. Thế vị của hàng 2 được tính:

$$u_2 = c_{21} - v_1 = 2 - 5 = -3.$$

- Trên hàng 3 ta có 1 ô chọn (3, 3) với cột 3 chưa xác định thế vị. Thế vị của cột 3 được tính là:

$$v_3 = c_{13} - u_1 = 1 - 0 = 1.$$

- Trên cột 3 ta có ô chọn (3, 3) với hàng 3 chưa xác định thế vị. Thế vị của hàng 3 được tính:

$$u_3 = c_{33} - v_3 = 2 - 1 = 1.$$

Sau khi tính hệ thống thế vị thu được các thế vị u_i, v_j ghi ở bảng trên.

c₃) Kiểm tra tiêu chuẩn tối ưu.

Tính:

$$\Delta_{22} = u_2 + v_2 - c_{22} = -3 + 4 - 6 = -5$$

$$\Delta_{23} = u_2 + v_3 - c_{23} = -3 + 1 - 3 = -5$$

$$\Delta_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = 1 + 5 - 10 = -4$$

$$\Delta_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = 1 + 4 - 7 = -3$$

Vì $\Delta_{ij} \leq 0$, với mọi ô loại (i, j) nên

$$x_{11} = 25, x_{12} = 30, x_{13} = 15, x_{21} = 50, x_{33} = 50$$

là phương án tối ưu. Trị tối ưu là:

$$f^* = 25.5 + 60.4 + 15.1 + 50.2 + 50.2 = 580.$$

5.4. Bài toán vận tải suy biến

5.4.1. Khái niệm về bài toán vận tải suy biến

Nếu số các thành phần $x_{ij} > 0$ nhỏ hơn $m + n - 1$ thì bài toán là suy biến.

Ta khắc phục suy biến như sau:

+ Ta thêm ô chọn phụ từ các ô loại cho đủ $m + n - 1$ ô chọn.

Ô loại được chọn phải hội đủ các điều kiện sau:

- Không cùng các ô chọn khác tạo thành vòng.
- Giúp tính được hệ thống thế vị (u_i, v_j) .

5.4.2. Ví dụ

Cho bài toán vận tải dạng bảng sau:

$B_j \backslash A_i$	b_1 70	b_2 60	b_3 40	b_4 30
a_1 80	1	5	6	2
a_2 100	4	2	1	5
a_3 20	3	4	3	6

Tìm phương án tối ưu của bài toán vận tải trên.

Giải.

Bước 1:

a₁) Xây dựng phương án ban đầu:

Bằng phương pháp chi phí nhỏ nhất ta có phương án ban đầu cho ở bảng sau.

Số ô chọn có $x_{ij} > 0$ là 5, trong khi $m + n - 1 = 6$.

Do đó, đây là bài toán suy biến nên ta phải tìm ô chọn phụ.

$B_j \backslash A_i$	b_1	b_2	b_3	b_4	u_i
a_1 80	1 70	5	6	2 10	$u_1 = 0$
a_2 100	4	2 60	1 40	5	$u_2 = 2$
a_3 20	3	4	3 0	6 20	$u_3 = 4$
v_j	$v_1 = 1$	$v_2 = 0$	$v_3 = -1$	$v_4 = 2$	

b₁) Tìm hệ thống thế vị (u_i, v_j) :

- Đặt thế vị của hàng 1 là: $u_1 = 0$.

- Trên hàng 1 ta có 2 ô chọn (1, 1) và (1, 4). Thế vị của cột 1 và 4 được tính:

$$v_1 = c_{11} - u_1 = 1 - 0 = 1$$

$$v_4 = c_{14} - u_1 = 2 - 0 = 2$$

- Trên cột 4 ta có ô chọn (3,4) với hàng 3 chưa xác định thế vị. Thế vị của hàng 3 được tính:

$$u_3 = c_{34} - v_4 = 6 - 2 = 4.$$

- Đến đây ta không tính tiếp được nữa. Do đó ta thêm ô chọn phụ (3, 3) và tính tiếp ta có.

$$v_3 = 3 - 4 = -1; \quad u_2 = 1 - (-1) = 2; \quad v_2 = 2 - 2 = 0.$$

c₁) Kiểm tra tiêu chuẩn tối ưu.

Tính:

$$\Delta_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = 0 + 0 - 5 = -5$$

$$\Delta_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + (-1) - 6 = -7$$

$$\Delta_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = 2 + 1 - 4 = -1$$

$$\Delta_{24} = u_2 + v_4 - c_{24} = 2 + 2 - 5 = -1$$

$$\Delta_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = 4 + 1 - 3 = 2 > 0$$

$$\Delta_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = 4 + 0 - 4 = 0$$

Vì $\Delta_{31} = 2 > 0$ nên đây chưa là phương án tối ưu. Ta điều chỉnh phương án.

d₁) Điều chỉnh phương án.

Ta xác định ô (3, 1) làm ô chọn mới, vì đây là ô có $\Delta_{31} = 2 > 0$ duy nhất.

Ô (3, 1) cùng với các ô chọn tạo thành vòng được đánh dấu như sau:

$$C_{31} = \{(3,1):(+); (1,1):(-); (1,4):(+); (3,4):(-)\}.$$

$A_i \backslash B_j$	b_1 70	b_2 60	b_3 40	b_4 30	u_i
a_1 80	1	5	6	2	$u_1=0$
a_2 100	4	2	1	5	$u_2=2$
a_3 20	3	4	3	6	$u_3=4$
v_j	$v_1=1$	$v_2=0$	$v_3=-1$	$v_4=2$	

Xác định $q = \min\{70, 20\} = 20$. Ta chuyển sang bước 2.

Bước 2:

a₂) Xây dựng phương án tiếp theo:

Ta điều chỉnh và có phương án như sau:

$A_i \backslash B_j$	b_1 70	b_2 60	b_3 40	b_4 30	u_i
a_1 80	1	5	6	2	$u_1=0$
a_2 100	4	2	1	5	$u_2=0$
a_3 20	3	4	3	6	$u_3=2$
v_j	$v_1=1$	$v_2=2$	$v_3=1$	$v_4=2$	

b₂) Tìm hệ thống thế vị (u_i, v_j) :

- Đặt thế vị của hàng 1 là: $u_1=0$.

- Tính truy hồi như bước trước ta được:

- Trên hàng 1 ta có 2 ô chọn (1, 1) và (1, 4). Thế vị của cột 1 và 4 được tính:

- Trên cột 1 ta còn ô chọn (3,1) với hàng 3 chưa xác định thế vị. Thế vị của hàng 3 được tính: $u_3 = c_{31} - v_1 = 3 - 1 = 2$.

- Trên hàng 3 ta còn 1 ô chọn (3, 3) với cột 3 chưa xác định thế vị. Thế vị của cột 3 được tính là: $v_3 = c_{33} - u_3 = 3 - 2 = 1$.

- Trên cột 3 ta có ô chọn (2, 3) với hàng 2 chưa xác định thế vị. Thế vị của hàng 2 được tính: $u_2 = c_{23} - v_3 = 1 - 1 = 0$.

- Trên cột 2 ta có ô chọn (2, 2) với cột 2 chưa xác định thế vị. Thế vị của cột 2 được tính: $v_2 = c_{22} - u_2 = 2 - 0 = 2$.

hệ thống thế vị được ghi ở bảng trên.

c₂) Kiểm tra tiêu chuẩn tối ưu.

$$\begin{aligned} \text{Tính:} \quad \Delta_{12} &= u_1 + v_2 - c_{12} = 0 + 2 - 5 = -3 \\ \Delta_{13} &= u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 1 - 6 = -5 \\ \Delta_{21} &= u_2 + v_1 - c_{21} = 0 + 1 - 4 = -3 \\ \Delta_{24} &= u_2 + v_4 - c_{24} = 0 + 2 - 5 = -3 \\ \Delta_{32} &= u_3 + v_2 - c_{32} = 2 + 2 - 4 = 0 \\ \Delta_{34} &= u_3 + v_4 - c_{34} = 2 + 2 - 6 = -2 \end{aligned}$$

Vì $\Delta_{ij} \leq 0$, với mọi (i, j) nên $x_{11} = 50, x_{14} = 30, x_{22} = 60, x_{23} = 40, x_{31} = 20, x_{33} = 0$ là phương án tối ưu. Trị tối ưu là:

$$f^* = 50.1 + 30.2 + 60.2 + 40.1 + 20.3 + 0.3 = 330.$$

5.5. Một số bài toán quy về bài toán vận tải chính tắc

5.5.1. Bài toán vận tải không cân bằng thu phát

5.5.1.1. Trường hợp cung nhỏ hơn cầu.

Ta có:

$$\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$$

Lúc này bài toán vận tải có dạng như sau:

$$f = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij} \rightarrow \min \quad (1)$$

với điều kiện:
$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i; (\forall i : i = \overline{1, m}) \quad (2a)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq b_j; (\forall j : j = \overline{1, n}) \quad (2b)$$

$$x_{ij} \geq 0; (\forall (i, j) : i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}). \quad (3).$$

Để giải quyết trường hợp này ta thêm trạm phát ảo A_{m+1} vào hàng cuối của bảng vận tải với các hệ số: $a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$ và $c_{(m+1)j} = 0; (\forall j : j = \overline{1, n})$.

Trạm phát A_{m+1} được gọi là trạm phát ảo vì nó không có thực mà chỉ là công cụ giúp cho chúng ta giải bài toán vận tải.

Bài toán mới có $m+1$ trạm phát và n trạm thu nên nó là bài toán cân bằng thu phát, ta giải nó theo phương pháp thế vị.

Phương án tối ưu của nó là phương án tối ưu của bài toán ban đầu, sau khi loại bỏ các biến ảo $x_{(m+1)j}$ cơ sở (nếu có).

Ví dụ 1: Cho bài toán vận tải sau:

B_j	b_1	b_2	b_3	b_4
A_i	80	60	30	90
a_1 70	3	7	5	2
a_2 130	5	3	4	7

Tìm phương án tối ưu của bài toán vận tải trên.

Giải:

Do đây là bài toán có cung nhỏ hơn cầu nên ta thêm trạm phát ảo A_3 với:

$$a_3 = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i = (80 + 60 + 30 + 90) - (70 + 130) = 60$$

và nhận được bài toán cân bằng thu phát sau:

B_j	b_1	b_2	b_3	b_4
A_i	80	60	30	90
a_1 70	3	7	5	2
a_2 130	5	3	4	7
a_3 60	0	0	0	0

Ta tìm phương án ban đầu theo phương pháp Foghen với lưu ý sau:
 Xét các hàng thực trước, cuối cùng mới phân vào hàng ảo cho đủ cân bằng.

a) Xây dựng phương án ban đầu:

$B_j \backslash A_i$	b_1	b_2	b_3	b_4	u_i
a_1 70	3	7	5	2	$u_1=0$
a_2 130	5	3	4	7	$u_2=3$
a_3 60	0	0	0	0	$u_3=-2$
v_j	$v_1=2$	$v_2=0$	$v_3=1$	$v_4=2$	

b) Tìm hệ thống thế vị (u_i, v_j) :

- Đặt thế vị của hàng 1 là: $u_1=0$.
- Tính truy hồi như bước trước ta được:
- Trên hàng 1 ta có 1 ô chọn (1, 4). Thế vị của cột 4 được tính:

$$v_4 = c_{14} - u_1 = 2 - 0 = 2$$

- Trên cột 4 ta còn ô chọn (3,4) với hàng 3 chưa xác định thế vị. Thế vị của hàng 3 được tính:

$$u_3 = c_{34} - v_4 = 0 - 2 = -2.$$

- Trên hàng 3 ta còn 1 ô chọn (3, 1) với cột 1 chưa xác định thế vị. Thế vị của cột 1 được tính là:

$$v_1 = c_{31} - u_3 = 0 - (-2) = 2.$$

- Trên cột 1 ta có ô chọn (2, 1) với hàng 2 chưa xác định thế vị. Thế vị của hàng 2 được tính:

$$u_2 = c_{21} - v_1 = 5 - 2 = 3.$$

- Trên cột 2 ta có ô chọn (2, 2) với cột 2 chưa xác định thế vị. Thế vị của cột 2 được tính:

$$v_2 = c_{22} - u_2 = 3 - 3 = 0.$$

- Trên cột 3 ta có ô chọn (2, 3) với cột 3 chưa xác định thế vị. Thế vị của cột 3 được tính:

$$v_3 = c_{23} - u_2 = 4 - 3 = 1.$$

hệ thống thế vị được ghi ở bảng trên. Ta sang bước c) như sau:

c) Kiểm tra tiêu chuẩn tối ưu.

$$\begin{aligned} \text{Tính:} \quad \Delta_{11} &= u_1 + v_1 - c_{11} = 0 + 2 - 3 = -1 \\ \Delta_{12} &= u_1 + v_2 - c_{12} = 0 + 0 - 7 = -7 \\ \Delta_{13} &= u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 1 - 5 = -4 \\ \Delta_{24} &= u_2 + v_4 - c_{24} = 3 + 2 - 7 = -2 \\ \Delta_{32} &= u_3 + v_2 - c_{32} = -2 + 0 - 0 = -2 \\ \Delta_{33} &= u_3 + v_3 - c_{33} = -2 + 1 - 0 = -1 \end{aligned}$$

Vì $\Delta_{ij} \leq 0$, với mọi (i, j) nên $x_{14} = 70, x_{21} = 40, x_{22} = 60, x_{23} = 30, x_{31} = 40, x_{34} = 20$ là phương án tối ưu. Trị tối ưu là:

$$f^* = 70.2 + 40.5 + 60.3 + 30.4 + 40.0 + 20.0 = 640.$$

5.5.1.2 Trường hợp cung lớn hơn cầu.

Ta có:

$$\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$$

Lúc này bài toán vận tải có dạng như sau:

$$f = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij} \rightarrow \min \quad (1)$$

$$\text{với điều kiện:} \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i; (\forall i : i = \overline{1, m}) \quad (2a)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j; (\forall j : j = \overline{1, n}) \quad (2b)$$

$$x_{ij} \geq 0; (\forall (i, j) : i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}). \quad (3).$$

Để giải quyết trường hợp này ta thêm trạm thu ảo B_{n+1} vào cột cuối của bảng vận tải với các hệ số

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$$

và
$$c_{i(n+1)} = 0; (\forall j : j = \overline{1, n}).$$

Trạm thu B_{n+1} được gọi là trạm thu ảo vì nó không có thực mà chỉ là công cụ giúp cho chúng ta giải bài toán vận tải.

Bài toán mới có m trạm phát và $n+1$ trạm thu nên nó là bài toán cân bằng thu phát, ta giải nó theo phương pháp thế vị. Phương án tối ưu của nó là phương án tối ưu của bài toán ban đầu, sau khi loại bỏ các biến ảo $x_{i(n+1)}$ cơ sở (nếu có).

Ví dụ 2 Cho bài toán vận tải sau:

B_j	b_1	b_2	b_3
A_i	20	40	60
a_1 80	3	4	1
a_2 30	4	2	3
a_3 50	1	5	6

Tìm phương án tối ưu của bài toán vận tải trên.

Giải:

Do đây là bài toán có cung lớn hơn cầu nên ta thêm trạm thu ảo B_4 với:

$$b_4 = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j = (80 + 30 + 50) - (20 + 40 + 60) = 40$$

và nhận được bài toán cân bằng thu phát sau:

a) Xây dựng phương án ban đầu:

Bằng phương pháp chi phí nhỏ nhất ta có phương án ban đầu cho ở bảng sau:

$A_i \backslash B_j$	b_1 20	b_2 40	b_3 60	b_4 40	u_i
a_1 80	3	4 10	1 60	0 10	$u_1 = 0$
a_2 30	4	2 30	3	0	$u_2 = -2$
a_3 50	1 20	5	6	0 30	$u_3 = 0$
v_j	$v_1 = 1$	$v_2 = 4$	$v_3 = 1$	$v_4 = 0$	

b) Tìm hệ thống thế vị (u_i, v_j) :

- Đặt thế vị của hàng 1 là: $u_1 = 0$.

- Trên hàng 1 ta có 3 ô chọn (1, 2), (1, 3) và (1, 4). Thế vị của cột 2, cột 3 và 4 được tính:

$$v_2 = c_{12} - u_1 = 4 - 0 = 4$$

$$v_3 = c_{13} - u_1 = 1 - 0 = 1$$

$$v_4 = c_{14} - u_1 = 0 - 0 = 0$$

- Trên hàng 2 ta có 1 ô chọn (2, 2). Thế vị của hàng 2 được tính:

$$u_2 = c_{22} - v_2 = 2 - 4 = -2$$

- Trên cột 4 ta có ô chọn (3,4) với hàng 3 chưa xác định thế vị. Thế vị của hàng 3 được tính:

$$u_3 = c_{34} - v_4 = 0 - 0 = 0.$$

- Trên cột 1 ta có ô chọn (3,1) với cột 1 chưa xác định thế vị. Thế vị của cột 1 được tính:

$$v_1 = c_{31} - u_3 = 1 - 0 = 1.$$

hệ thống thế vị được ghi ở bảng trên. Ta sang bước c) như sau:

c) Kiểm tra tiêu chuẩn tối ưu.

Tính:

$$\Delta_{11} = u_1 + v_1 - c_{11} = 0 + 1 - 3 = -2$$

$$\Delta_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = -2 + 1 - 4 = -5$$

$$\Delta_{23} = u_2 + v_3 - c_{23} = -2 + 1 - 3 = -4$$

$$\Delta_{24} = u_2 + v_4 - c_{24} = -2 + 0 - 0 = -2$$

$$\Delta_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = 0 + 4 - 5 = -1$$

$$\Delta_{33} = u_3 + v_3 - c_{33} = 0 + 1 - 6 = -5$$

Vì $\Delta_{ij} \leq 0$, với mọi (i, j) nên $x_{12} = 10, x_{13} = 60, x_{14} = 10, x_{22} = 30, x_{31} = 20, x_{34} = 30$ là phương án tối ưu. Trị tối ưu là:

$$f^*(x) = 10.4 + 60.1 + 10.0 + 30.2 + 20.1 + 30.0 = 180.$$

5.5.2. Bài toán vận tải tìm max

Trên đây ta đã nghiên cứu các bài toán vận tải tìm trị nhỏ nhất của hàm mục tiêu. Nhưng trong thực tế có những vấn đề dẫn đến việc giải bài toán vận tải tìm trị lớn nhất của hàm mục tiêu.

Bài toán bố trí công việc sau đây là một ví dụ:

Có m người bố trí làm m công việc (mỗi người làm một việc). Hiệu suất người i ($\forall i : i = \overline{1, m}$) làm công việc j , ($\forall j : j = \overline{1, n}$) là c_{ij} .

Tìm phương án bố trí công việc tốt nhất.

Bài toán có mô hình toán học sau:

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij} \rightarrow \max \quad (1)$$

$$\text{với điều kiện:} \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1; (\forall i : i = \overline{1, m}) \quad (2a)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1; (\forall j : j = \overline{1, n}) \quad (2b)$$

$$x_{ij} \geq 0; (\forall (i, j) : i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}). \quad (3).$$

Để giải bài toán này cần lưu ý các điểm sau:

- Phương pháp C_{\min} tìm phương án ban đầu đổi thành phương pháp c_{\max} , tức là chọn c_{ij} lớn nhất để bố trí trước.

- Xác định hệ thống thế vị như cũ:

$$u_i + v_j = c_{ij}; \quad \forall x_{ij} > 0.$$

- Tiêu chuẩn tối ưu hiệu chỉnh lại như sau:

$$u_i + v_j - c_{ij} \geq 0 \Rightarrow \hat{o}(i, j) \text{ đạt}$$

$$u_i + v_j - c_{ij} < 0 \Rightarrow \hat{o}(i, j) \text{ không đạt, cần hiệu chỉnh.}$$

- Phương pháp hiệu chỉnh như cũ.

Ví dụ 3

Có 6 công nhân làm 6 loại công việc. Năng suất tính bằng phần trăm của trình độ làm việc (số 0 có nghĩa là công nhân không am hiểu công việc, không làm được công việc đó). Năng suất làm việc cho ở bảng dưới.

$\begin{matrix} CV_{(j)} \\ CN_{(i)} \end{matrix}$	1	2	3	4	5	6
1	100	119	116	126	96	0
2	98	131	128	129	115	112
3	132	115	115	116	135	102
4	0	96	108	112	126	122
5	122	126	0	108	112	115
6	109	118	112	115	126	138

Tìm phương án bố trí công việc sao cho tổng năng suất là lớn nhất.

Giải:

$\begin{matrix} CV_{(j)} \\ CN_{(i)} \end{matrix}$	1	2	3	4	5	6
1	100	119	116	126	96	0
2	98	131	128	129	115	112
3	132	115	115	116	135	102
4	0	96	108	112	126	122
5	122	126	0	108	112	115
6	109	118	112	115	126	138

Ta chọn c_{ij} lớn nhất để bố trí trước, ở bài toán này đối với công nhân 6 ta chọn công việc thứ 6 vì có năng suất làm việc $c_{66} = 138\%$ là lớn nhất. Tương tự ta chọn cho các công nhân khác.

Phương án cho trên bảng cũng là phương án tối ưu của bài toán.

5.5.3. Bài toán vận tải có ô cấm

5.5.3.1. Nội dung phương pháp

Trong thực tế cũng thường xảy ra trường hợp:

Hàng từ trạm phát A_h ($1 \leq h \leq m$) không thể chở đến trạm thu B_k ($1 \leq k \leq n$) có nhiều lý do khác nhau, chẳng hạn từ trạm phát A_h đến trạm thu B_k không có đường đi hoặc trạm thu B_k không có nhu cầu về hàng hoá của trạm phát A_h .

Ô (h, k) gọi là ô cấm. Vì vậy ta có bài toán vận tải có ô cấm.

Để giải bài toán vận tải có ô cấm ta thực hiện như sau:

- Gán cho các ô cấm (h, k) hệ số chi phí $C_{hk} = M$, với M là một số rất lớn ($+\infty$).
- Giải bằng phương pháp thế vị một cách bình thường.

Lưu ý

Khi xét tiêu chuẩn tối ưu, biểu thức $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ sẽ dương (âm) nếu chứa M với dấu dương (âm).

5.5.3.2. Ví dụ

Giải bài toán vận tải có ô cấm sau:

B_j	b_1	b_2	b_3	b_4
A_i	45	100	50	60
a_1 70	M	16	15	11
a_2 100	10	17	9	M
a_3 85	12	14	10	13

Giải.

Mục đích của chúng ta là phân phối sao cho chi phí đạt giá trị nhỏ nhất (min) cho nên chi phí cho các ô cấm sẽ được gán là $M > 0$, rất lớn.

Sử dụng phương pháp chi phí nhỏ nhất để tìm phương án cơ bản ban đầu, ta được:

$B_j \backslash A_i$	b_1	b_2	b_3	b_4
	45	100	50	60
a_1	M	16	15	11
70		10		60
a_2	10	17	9	M
100	45	5	50	
a_3	12	14	10	13
85		85		

Phương án cơ bản ban đầu:

$$X^0 = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 & 60 \\ 45 & 5 & 50 & 0 \\ 0 & 85 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Số ô chọn của X^0 là $6 = 3 + 4 - 1$, nên X^0 không suy biến.

Hàng 2 và cột 2 cùng có số ô chọn nhiều nhất.

Ở đây chúng ta chọn hàng 2, nên ta gán $u_2 = 0$, sau đó tính các thế vị còn lại như bảng sau:

$B_j \backslash A_i$	b_1	b_2	b_3	b_4	u_i
	45	100	50	60	
a_1	M	16	15	11	
70	9-M	10	-7	60	-1
a_2	10	17	9	M	
100	45	5	50	12-M	0
a_3	12	14	10	13	
85	-5	85	-4	-4	-3
v_j	10	17	9	12	

Với hệ thống thế vị vừa tìm được, chúng ta tiến hành tính các hệ số ước lượng.

Từ bảng trên ta có: do $M > 0$, rất lớn nên $\Delta_{ij} \leq 0, \forall(i, j)$. Do đó phương án đang xét là phương án tối ưu của bài toán.

Vậy phương án tối ưu của bài toán là:

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 & 60 \\ 45 & 5 & 50 & 0 \\ 0 & 85 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

và trị tối ưu là: $f(X^*) = 2995$.

5.5.4. Bài toán xe không

5.5.4.1. Nội dung phương pháp

Đối với các doanh nghiệp kinh doanh vận tải thì việc bố trí các xe chạy theo các tuyến là rất quan trọng. Cần bố trí sao cho tổng số tấn - km xe chạy không là nhỏ nhất.

Ở trên ta xét bài toán phân phối hàng hoá từ các trạm phát A_i đến các trạm thu B_j . Giải bài toán này ta mới biết lượng x_{ij} trong phương án tối ưu là bao nhiêu (tấn), nhưng ta chưa bố trí được các xe tải đi theo các tuyến này như thế nào cho hợp lý (trên quan điểm của xí nghiệp vận tải) để cho xe ít phải chạy không hàng (tức tổng số tấn - km xe chạy không là nhỏ nhất).

Bài toán đặt ra như sau:

Có những loại hàng khác nhau cần chở từ một số trạm này đến một số trạm khác. Lượng hàng cần vận chuyển và hệ thống đường sá nối liền các trạm đã biết. Cần xác định hành trình của các xe sao cho tổng số tấn - km là nhỏ nhất.

Gọi một T - km xe không là số đo của một xe có trọng tải 1 tấn chạy không hàng trên đoạn đường 1 km.

Chú ý rằng trạm thu hàng lúc này trở thành trạm phát xe không và trạm phát hàng trở thành trạm thu xe không. Có bao nhiêu xe chở hàng đến trạm thu thì có bấy nhiêu xe không trả về các trạm phát nên bài toán bao giờ cũng cân bằng thu phát.

Như vậy bài toán hoàn toàn tương tự như bài toán phân phối hàng, chỉ cần đổi vai trò trạm thu thành trạm phát và ngược lại. Các thuật giải đều như cũ.

Chú ý rằng ở đây những đoạn đường chở hàng là hoàn toàn xác định, số lượng hàng phải chở cũng như vậy nên không có vấn đề giảm tổng số T-km xe chạy có

hàng, mà chỉ có khả năng xác định hành trình của các xe sao cho tổng số T-km xe không là nhỏ nhất.

Ký hiệu: \longrightarrow là tuyến xe chạy có tải;

\dashrightarrow là tuyến xe chạy không có tải .

$[x_{ij}]$: khối lượng hàng phải vận chuyển;

(x_{ij}) : ứng với phương án tối ưu của bài toán xe không.

Nếu trong một ô có 2 số: $[x_{ij}]$ và (x_{ij}) , ta chọn số nhỏ nhất (đó là số tấn trọng tải xe cần điều động).

Sau khi giải bài toán có phương án vận chuyển với tổng số T-km xe không là nhỏ nhất. Sau đó ta còn phải bố trí cụ thể hành trình chi tiết cho từng xe.

5.5.4.2. Ví dụ

Một xí nghiệp vận tải thực hiện kế hoạch vận tải sau đây:

Nơi cấp hàng	Loại hàng	Trọng tải xe (tấn)	Nơi nhận hàng
A ₁	Sắt	40	B ₁
		20	B ₃
		35	B ₄
A ₂	Xi măng	10	B ₁
		15	B ₂
		40	B ₄
A ₃	Gạch	30	B ₂
		40	B ₃

Ma trận khoảng cách từ nơi cấp hàng đến nơi nhận hàng:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Yêu cầu lập kế hoạch điều động xe sao cho thực hiện được kế hoạch vận tải với tổng số tấn x km xe chạy không tải là ít nhất.

Giải.

Giả thiết các xe có thể chở được tất cả loại hàng trên.

$$A_1: 40 + 20 + 35 = 95;$$

$$A_2: 10 + 15 + 40 = 65;$$

$$A_3: 30 + 40 = 70;$$

$$B_1: 40 + 10 = 50;$$

$$B_2: 15 + 30 = 45;$$

$$B_3: 20 + 40 = 60;$$

$$B_4: 35 + 40 = 75.$$

a) Thực hiện phương pháp thế vị giải bài toán thu phát xe không:

Phát Thu	50	45	60	75	u_i
95	2 20	3	4	1 75	$u_1 = 0$
65	3 5	4	1 60	6	$u_2 = 1$
70	4 25	5 45	2	3	$u_3 = 2$
v_j	$v_1 = 2$	$v_2 = 3$	$v_3 = 0$	$v_4 = 1$	

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - C_{ij} \leq 0; (i, j).$$

Nên phương án tối ưu là: $X^* = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 & 75 \\ 5 & 0 & 60 & 0 \\ 25 & 45 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

và trị tối ưu là: $f_{\min}(X^*) = 515.$

b) Kết hợp với kế hoạch vận chuyển, ta có bảng:

[40] (20)		[20]	[35] (75)
[10] (5)	[15]		[40] (60)
	[30] (25)	[40] (45)	

Trên bảng ta có 4 ô vừa có ô tròn, vừa có ô vuông là: (1,1); (1,4); (2,1); (3,2) tương ứng ta có 4 tuyến điều động:

$$A_1 \rightarrow B_1 \dashrightarrow A_1 : 20T$$

$$A_1 \rightarrow B_4 \dashrightarrow A_1 : 35T$$

$$A_2 \rightarrow B_1 \dashrightarrow A_2 : 5T$$

$$A_3 \rightarrow B_2 \dashrightarrow A_3 : 30T .$$

Sau khi giảm lượng chênh lệch giữa ô tròn và ô vuông giữa, ta có bảng mới:

[20]		[20]	
			(40)
[5]	[15]		[40]
		(60)	
		[40]	
(25)	(15)		

$$A_1 \rightarrow B_3 \dashrightarrow A_2 \rightarrow B_4 \dashrightarrow A_1 : 20T$$

[20]			(20)
[5]	[15]		[20]
			(40)
		[40]	
(25)	(15)		

$$A_2 \rightarrow B_1 \dashrightarrow A_3 \rightarrow B_3 \dashrightarrow A_2 : 5T$$

[20]			(20)
	[15]		[20]
			(35)
		[35]	
(20)	(15)		

$$A_2 \rightarrow B_2 \dashrightarrow A_3 \rightarrow B_3 \dashrightarrow A_2 : 15T$$

[20]			
	[15]		[20]
		[20]	
(20)			

$$A_1 \rightarrow B_1 \dashrightarrow A_3 \rightarrow B_3 \dashrightarrow A_2 \rightarrow B_4 \dashrightarrow A_1 : 20T .$$

Tóm lại:

$$A_1 \rightarrow B_1 \dashrightarrow A_1 : 20T$$

$$A_1 \rightarrow B_4 \dashrightarrow A_1 : 35T$$

$$A_2 \rightarrow B_1 \dashrightarrow A_2 : 5T$$

$$A_3 \rightarrow B_2 \dashrightarrow A_3 : 30T$$

$$A_2 \rightarrow B_1 \dashrightarrow A_3 \rightarrow B_3 \dashrightarrow A_2 : 5T$$

$$A_2 \rightarrow B_2 \dashrightarrow A_3 \rightarrow B_3 \dashrightarrow A_2 : 15T$$

$$A_1 \rightarrow B_1 \dashrightarrow A_3 \rightarrow B_3 \dashrightarrow A_2 \rightarrow B_4 \dashrightarrow A_1 : 20T .$$

Bài tập chương 5.

BÀI TOÁN VẬN TẢI, THUẬT TOÁN THỂ VỊ

Bài 1.

Giải bài toán vận tải

c_{ij} \ B	30	40	50	60
A	5	4	6	4
30				
40				
110				

Bài 2.

Giải bài toán vận tải

c_{ij} \ B	110	40	30
A	7	3	4
60			
50			
40			
30			

Bài 3.

Giải bài toán vận tải

c_{ij} \ B	104	22	40	118
A	1	4	2	2
31				
50				
75				
128				

Bài 4.

Giải bài toán vận tải

c_{ij} \ B	60	25	15	20
A				
30	4	3	2	1
40	2	8	6	5
50	3	5	7	9

Bài 5.

Giải bài toán vận tải

c_{ij} \ B	60	60	80	50
A				
100	5	4	6	2
20	3	1	4	7
130	4	5	6	3

Bài 6.

Giải bài toán vận tải tìm max:

B_j	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
A_i	76	62	88	45	40
a_1	10	19	15	6	7
79					
a_2	13	11	8	7	4
102					
a_3	12	17	10	5	3
70					
a_4	12	18	18	9	10
60					

Bài 7.

Giải bài toán vận tải có ô cấm sau:

$A_i \backslash B_j$	b_1	b_2	b_3	b_4
	70	80	40	30
a_1 100	M	30	45	M
a_2 80	55	40	30	50
a_3 40	50	35	35	45

Bài 8.

Giải bài toán vận tải có ô cấm sau:

$A_i \backslash B_j$	b_1	b_2	b_3	b_4
	50	80	35	65
a_1 55	7	11	14	101
a_2 115	10	M	9	M
a_3 60	12	10	11	14

Bài 9. Giải bài toán vận tải có ô cấm sau:

$A_i \backslash B_j$	b_1	b_2	b_3
	140	155	170
a_1 110	5	7	10
a_2 125	8	5	9
a_3 120	12	6	11
a_4 135	9	8	13

Với điều kiện trạm a_2 và trạm a_4 phát hết hàng.

Bài 10.

Giải bài toán vận tải có ô cấm sau:

$A_i \backslash B_j$	b_1 45	b_2 55	b_3 40	b_4 75
a_1 70	5	6	6	8
a_2 65	4	5	8	7
a_3 55	3	4	7	3

Với điều kiện trạm b_1 và trạm b_3 thu đủ hàng.

Bài 11.

Giải bài toán không cân bằng thu phát sau:

$A_i \backslash B_j$	b_1 25	b_2 35	b_3 60	b_4 30
a_1 20	2	3	1	4
a_2 40	4	5	3	2
a_3 60	1	2	7	6

Bài 12.

Giải bài toán không cân bằng thu phát sau:

$A_i \backslash B_j$	b_1 20	b_2 30	b_3 45	b_4 50
a_1 40	5	8	6	11
a_2 30	6	7	7	12
a_3 55	8	8	9	10

Bài 13.

Giải bài toán không cân bằng thu phát sau:

B_j	b_1	b_2	b_3	b_4
A_i	50	35	65	75
a_1 90	2	3	1	4
a_2 75	4	5	3	2
a_3 80	1	2	7	6

Bài 14.

Giải bài toán không cân bằng thu phát sau:

B_j	b_1	b_2	b_3
A_i	50	70	75
a_1 40	12	14	25
a_2 65	26	17	13
a_3 45	15	18	19
a_4 60	16	23	22

Bài 15.

Một xí nghiệp vận tải thực hiện kế hoạch vận tải sau đây:

Nơi cấp hàng	Loại hàng	Trọng tải xe (tấn)	Nơi nhận hàng
A_1	Đường	50	B_1
		20	B_4
A_2	Đậu	45	B_2
		5	B_3
		30	B_4
A_3	Hạt điều	35	B_1
		55	B_3

Ma trận khoảng cách từ nơi cấp hàng đến nơi nhận hàng:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Yêu cầu lập kế hoạch điều động xe sao cho thực hiện được kế hoạch vận tải với tổng số tấn x km xe chạy không tải là ít nhất.

Bài 16.

Một xí nghiệp vận tải thực hiện kế hoạch vận tải sau đây:

Nơi cấp hàng	Loại hàng	Trọng tải xe (tấn)	Nơi nhận hàng
A ₁	Gạo	30	B ₁
		40	B ₂
		50	B ₃
A ₂	Đường	75	B ₃
		55	B ₄
A ₃	Sữa	20	B ₁
		50	B ₂
		15	B ₄

Ma trận khoảng cách từ nơi cấp hàng đến nơi nhận hàng:

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Yêu cầu lập kế hoạch điều động xe sao cho thực hiện được kế hoạch vận tải với tổng số tấn x km xe chạy không tải là ít nhất.

Bài 17.

Một xí nghiệp vận tải thực hiện kế hoạch vận tải sau đây:

Nơi cấp hàng	Loại hàng	Trọng tải xe (tấn)	Nơi nhận hàng
A ₁	Gạo	50	B ₂
		30	B ₄
A ₂	Mi	25	B ₁
		40	B ₃
A ₃	Đường	10	B ₁
		15	B ₂

Ma trận khoảng cách từ nơi cấp hàng đến nơi nhận hàng:

$$\begin{pmatrix} 20 & 50 & 70 & 30 \\ 40 & 30 & 60 & 40 \\ 30 & 60 & 50 & 60 \end{pmatrix}.$$

Yêu cầu lập kế hoạch điều động xe sao cho thực hiện được kế hoạch vận tải với tổng số tấn x km xe chạy không tải là ít nhất.

Bài 18.

Một xí nghiệp vận tải thực hiện kế hoạch vận tải sau đây:

Nơi cấp hàng	Loại hàng	Số lượng (tấn)	Nơi nhận hàng
A ₁	Cam	50	B ₁
		20	B ₂
A ₂	Bưởi	10	B ₁
		40	B ₃
A ₃	Sầu riêng	50	B ₄
		30	B ₂

Ma trận khoảng cách từ nơi cấp hàng đến nơi nhận hàng:

$$\begin{pmatrix} 30 & 20 & 40 & 50 \\ 40 & 30 & 10 & 20 \\ 50 & 40 & 20 & 50 \end{pmatrix}.$$

Yêu cầu lập kế hoạch điều động xe sao cho thực hiện được kế hoạch vận tải với tổng số tấn x km xe chạy không tải là ít nhất.

Bài 19.

Một xí nghiệp vận tải thực hiện kế hoạch vận tải sau đây:

Nơi cấp hàng	Loại hàng	Trọng tải xe (tấn)	Nơi nhận hàng
A ₁	Gạo	100	B ₁
		50	B ₂
A ₂	Bắp	10	B ₁
		50	B ₃
A ₃	Bột mì	100	B ₄
		80	B ₂

Ma trận khoảng cách từ nơi cấp hàng đến nơi nhận hàng:

$$\begin{pmatrix} 25 & 55 & 70 & 35 \\ 40 & 30 & 65 & 45 \\ 30 & 65 & 50 & 60 \end{pmatrix}.$$

Yêu cầu lập kế hoạch điều động xe sao cho thực hiện được kế hoạch vận tải với tổng số tấn x km xe chạy không tải là ít nhất.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Trần Đình Ánh (2007), *Bài tập Quy hoạch tuyến tính*, NXB Giáo dục, Hà Nội.
- [2] Phí Mạnh Ban (1998), *Quy hoạch tuyến tính*, NXB Giáo dục, Hà Nội.
- [3] Trần Quốc Chiên (2007), *Giáo trình quy hoạch tuyến tính*, Đại học Đà Nẵng, (Lưu hành nội bộ)..
- [4] Võ Văn Tuấn Dũng (2007), *Giáo trình quy hoạch tuyến tính*, NXB Thống kê.
- [5] Hoàng Đức Hải - Vũ Thị Bích Liên - Trần Gia Tùng (2000), *Giáo trình Toán kinh tế*, NXB Giáo dục, Hà Nội.
- [6] Đặng Hân (1995), *Quy hoạch tuyến tính (Lý thuyết & Bài tập có lời giải)*, Trường ĐH Kinh tế Tp Hồ Chí Minh, (Lưu hành nội bộ).
- [7] Nguyễn Đức Hiền (2009), *Giáo trình quy hoạch tuyến tính*, NXB Thông tin và truyền thông, Hà nội.
- [8] Lê Khánh Luận (2006), *Lý thuyết-Bài tập-Bài giải Quy hoạch tuyến tính tối ưu hóa*, NXB Lao động.
- [9] Nguyễn Đức Nghĩa (1996), *Tối ưu hóa (Quy hoạch tuyến tính và rời rạc)*, NXB Giáo dục, Hà Nội.
- [10] Lê Văn Phi (2004), *Quy hoạch tuyến tính và ứng dụng trong kinh tế*, NXB Giáo dục, Hà Nội.
- [11] Nguyễn Xuân Thủy (1995), *Bài tập Quy hoạch tuyến tính*, NXB Giáo dục, Hà Nội.
- [12] Trần Túc (2001), *Bài tập quy hoạch tuyến tính*, NXB Khoa học Kỹ thuật.
- [13] Hoàng Tụy (1967), *Lý thuyết quy hoạch*, NXB Giáo dục, Hà Nội.
- [14] G.Dantzig (1963), *Linear programming and extensions*, Jersey.
- [15] Kuzexov A.B., Cholod N.I., Koxtovich L.X. (1978), *Hướng dẫn giải bài toán quy hoạch tuyến tính*, NXB Đại học (Tiếng Nga). Minsk.
- [16] Achmanov S. (1984), *Programmation Linéaire*. Edition Mir. Moscou.
- [17] Gass S.I. (1969), *Linear Programming – Methods and Applications*. McGraw-Hill Book Co. New York.

MỤC LỤC

Lời nói đầu	2
Chương 1. BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH.....	4
1.1. Một vài bài toán thực tế.....	4
1.1.1. Xây dựng mô hình toán học cho một số vấn đề thực tế.....	4
1.1.2. Một vài bài toán thực tế.....	4
1.2. Các dạng bài toán quy hoạch tuyến tính.....	13
1.2.1. Bài toán quy hoạch tuyến tính tổng quát.....	13
1.2.2. Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn tắc.....	15
1.2.3. Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc	16
1.3. Phương pháp hình học giải bài toán quy hoạch tuyến tính hai biến	18
1.3.1. Nội dung phương pháp.....	18
1.3.2. Các ví dụ.....	19
Bài tập chương 1.....	23
Chương 2. TÍNH CHẤT CỦA TẬP PHƯƠNG ÁN VÀ TẬP PHƯƠNG	
ÁN TỐI ƯU CỦA BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH.....	27
2.1. Tập hợp lồi.....	27
2.1.1. Tổ hợp lồi.....	27
2.1.2. Tập hợp lồi.....	27
2.1.3. Điểm cực biên của một tập hợp lồi.....	28
2.1.4. Bao lồi	28
2.1.5. Đa diện lồi và tập lồi đa diện.....	29
2.2. Tính chất của tập phương án và tập phương án tối ưu của bài toán quy hoạch tuyến tính.....	30
2.2.1. Định lý 1 (Tính lồi của tập phương án).....	30
2.2.2. Định lý 2 (Sự tồn tại lời giải của bài toán quy hoạch tuyến tính).....	30
2.2.3. Định lý 3	31
2.3. Tính chất của bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc.....	31
2.3.1. Định lý 1 (Tính chất đặc trưng của phương án cực biên)	31
2.3.2. Hệ quả 1.	33

2.3.3. Hệ quả 2	33
2.3.4. Định lý 2.....	35
2.3.5. Định lý 3.....	35
Bài tập chương 2.....	36
Chương 3. PHƯƠNG PHÁP ĐƠN HÌNH	
VÀ CÁC THUẬT TOÁN CỦA NÓ	37
3.1. Cơ sở lý luận của phương pháp đơn hình.....	37
3.1.1. Định nghĩa.....	37
3.1.2. Các tính chất cơ bản.....	38
3.2. Công thức đổi cơ sở.....	40
3.2.1. Phép biến đổi Jordan	40
3.2.2. Giải hệ phương trình tuyến tính	41
3.2.3. Phương pháp tìm phương án	44
3.3. Thuật toán đơn hình gốc.....	47
3.3.1. Thuật toán đơn hình giải bài toán quy hoạch tuyến tính.....	47
3.3.2. Các ví dụ.....	49
3.4. Thuật toán đơn hình với cơ sở giả.....	53
3.4.1. Nội dung phương pháp	53
3.4.2. Ví dụ	54
Bài tập chương 3.....	57
Chương 4 BÀI TOÁN ĐỐI NGẪU,	
THUẬT TOÁN ĐƠN HÌNH ĐỐI NGẪU.....	59
4.1. Bài toán đối ngẫu.....	59
4.1.1. Định nghĩa.....	59
4.1.2. Mối quan hệ giữa bài toán gốc và bài toán đối ngẫu.....	62
4.1.3. Tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu	63
4.2. Thuật toán đơn hình đối ngẫu.....	66
4.2.1. Nội dung thuật toán đơn hình đối ngẫu	66
4.2.2. Thuật toán đơn hình đối ngẫu.....	68
4.2.3. Ứng dụng.....	72

4.3. Ý nghĩa của bài toán đối ngẫu.....	74
4.3.1. Ý nghĩa toán học.....	74
4.3.2. Ý nghĩa kinh tế.....	77
Bài tập chương 4.....	79
Chương 5. BÀI TOÁN VẬN TẢI, THUẬT TOÁN THỂ VỊ	82
5.1. Một số tính chất của bài toán vận tải.....	82
5.1.1. Thành lập bài toán	82
5.1. 2. Một số định nghĩa khác.....	83
5.1. 3. Các tính chất.....	84
5.2. Một số phương pháp xây dựng phương án cực biên ban đầu.....	86
5.2.1. Phương pháp góc Tây Bắc	86
5.2.2. Phương pháp chi phí nhỏ nhất	87
5.2.3. Phương pháp Foghen	89
5.3. Thuật toán thể vị	90
5.3.1. Nội dung thuật toán thể vị	90
5.3.2. Ví dụ	91
5.4. Bài toán vận tải suy biến	96
5.4.1. Khái niệm về bài toán vận tải suy biến	96
5.4.2. Ví dụ.....	96
5.5. Một số bài toán quy về bài toán vận tải chính tắc.....	99
5.5.1. Bài toán vận tải không cân bằng thu phát.....	99
5.5.2. Bài toán vận tải tìm max.....	105
5.5.3. Bài toán vận tải có ô cấm.....	107
5.5.4. Bài toán xe không... ..	109
Bài tập chương 5.....	114
Tài liệu tham khảo	121
Mục lục	122