ỦY BAN NHÂN DÂN TỈNH QUẢNG NGÃI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC PHẠM VĂN ĐỒNG

BÀI GIẢNG

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

LIÊN VƯƠNG LÂM

Tổ Toán- Lý- Khoa Cơ Bản
Quảng Ngãi - 2013

ỦY BAN NHÂN DÂN TỈNH QUẢNG NGÃI

TRƯỜNG ĐẠI HỌC PHẠM VĂN ĐỒNG

BÀI GIẢNG PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

LIÊN VƯƠNG LÂM

Tổ Toán- Lý- Khoa Cơ Bản

Quảng Ngãi- 2013

Mục lục

Mở đầu

Phương trình vi phân là bài toán xuất phát từ cơ học, vật lý, sinh học.... Trong quá trình nghiên cứu sinh ra những phương trình mà nghiệm là hàm cần tìm cùng với đạo hàm các cấp của hàm số đó. Việc tìm những hàm số như thế là giải phương trình vi phân. Khi giải các phương trình vi phân hoặc tìm các tính chất của nghiệm phương trình vi phân làm cho người học, nhất là sinh viên ngành toán học, có cái nhìn chặt chẽ về đường cong, về tích phân cũng như bài toán tiếp tuyến... đã được học ở các học phần trước.
Sau khi học môn Phương trình vi phân, người học sẽ được trang bị những kiến thức để có thể tiếp cận các môn học ở các bậc học tiếp theo như phương trình đạo hàm riêng, toán cho vật lý, phương trình toán lý...

Đối với chương trình Cao đẳng sư phạm Toán, học phần Phương trình vi phân có thời lượng 2 tín chỉ tương ứng với 30 tiết. Học phần này chủ yếu giới thiệu cho người học đại cương về Phương trình vi phân, cách giải một số phương trình vi phân dạng đặc biệt, cũng như sơ lược về hệ phương trình vi phân.

Chúng tôi viết bài giảng phương trình vi phân trên cơ sở tham khảo các tài liệu tham khảo, sắp xếp một cách hệ thống nhằm mục đích tạo cho người học có thể tiếp cận môn học dễ dàng. Không giống như đối với các ngành kỹ thuật, chúng tôi quan tâm nhiều đến những yếu tố " tính chất toán học" trong học phần này.

Bài giảng được chia thành 6 chương:

Chương 1: Phương trình vi phân cấp một

Chương 2: Phương trình vi phân cấp một chưa giải ra đạo hàm.

Chương 3: Phương trình vi phân cấp cao.

Chương 4: Phương trình vi phân tuyến tính cấp n.

Chương 5: Một số phương trình tuyến tính cấp n dạng đặc biệt.

Chương 6: Hệ phương trình vi phân.

Vì thời lượng chỉ 2 tín chỉ nên bài giảng không thể đi sâu trong một số vấn đề. Người học có thể tham khảo thêm trong [1]. Cuối mỗi chương, chúng tôi có soạn thêm một số bài tập. Người học có thể làm thêm các bài tập thuộc học phần này trong [2].

Lần đầu tiên biên soạn nên không tránh khỏi sai lầm và thiếu sót. Chúng tôi mong nhận được góp ý chân thành của bạn đọc. Chân thành cảm ơn.

Quảng Ngãi, tháng 12 năm 2013

Liên Vương Lâm

Chương 1

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT

1.1 Các khái niệm mở đầu

Phương trình vi phân là phương trình chứa hàm cần tìm và các đạo hàm của nó và biến độc lập. Phương trình vi phân ra đời vào thế kỷ 17 từ các nhu cầu của bài toán cơ học. Phương trình vi phân ra đời đồng thời với phép tính tích phân. Đến thế kỷ 18, phương trình vi phân trở thành một ngành toán học độc lập nhờ vào các công trình của Bernoulli, D'Alembert và nhất là Euler. Sau đây là một số ví dụ dẫn đến phương trình vi phân

Ví dụ 1.1. Một vật có khối lượng m rơi tự do với lực cản của không khí tỉ lệ với vận tốc rơi.

Gọi $v(t)$ là vận tốc rơi của vật, khi đó có hai lực tác động lên vật là trọng lực $F_1 = mg$ cùng chiều với chuyển động của vật và lực cản của không khí $F_2 = -\alpha v(t)$.

Theo định luật hai Newton thì

$$a = \frac{dv}{dt}, F = F_1 + F_2 = mg - \alpha v \to m\frac{dv}{dt} = mg - \alpha v.$$

Trong phương trình trên có chứ hàm cần tìm $v(t)$ và đạo hàm của nó. Đây là một phương trình vi phân.

Ví dụ 1.2. Một thanh kim loại được nung đến 100^0C đặt trong một môi trường có nhiệt độ không đổi là 20^0C. Tìm quy luật thay đổi của nhiệt độ kim loại.

Gọi $T(t)$ là nhiệt độ của thanh kim loại tại thời điểm t. Theo quy luật Newton về giảm nhiệt của vật thì tốc độ giảm nhiệt $\frac{dT}{dt}$ tỉ lệ với hiệu nhiệt độ của vật thể và nhiệt độ của môi trường tại thời điểm đó $T(t) - 20$. Cho nên

$$\frac{dT}{dt} = -k\big(T(t) - 20\big), \qquad k > 0$$

1.1.1 Các định nghĩa và khái niệm cơ bản

Định nghĩa 1.1.1. Một phương trình chứa đạo hàm hoặc vi phân của một hoặc một vài hàm cần tìm được gọi là **phương trình vi phân**. Nếu phương trình chỉ chứa các đạo hàm của một biến độc lập thì được gọi là **phương trình vi phân thường**, nếu trong phương trình có chưa các đạo hàm riêng thì được gọi là **phương trình đạo hàm riêng**.

Định nghĩa 1.1.2. Cấp cao nhất của đạo hàm có trong phương trình được gọi là cấp của phương trình vi phân đó.

Ví dụ 1.3. Các phương trình sau là các phương trình vi phân thường

a. $\dfrac{dy}{dx} = 2x + 1.$

b $(y'')^2 + 2y' + y = e^x.$

Ví dụ 1.4. Các phương trình sau là phương trình đạo hàm riêng

a. $\dfrac{\partial f}{\partial x} + x\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0.$

b. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + x\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = 0.$ Ví dụ 1.5. Các phương trình vi phân sau

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - y = 0; xy^5\frac{dy}{dx} + 3y^2 + 1 = 0$$

là các phương trình vi phân cấp 2 và cấp một tương ứng.

1.1.2 Định nghĩa phương trình vi phân cấp một

Định nghĩa 1.1.3. Phương trình vi phân cấp một là phương trình có dạng

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1.1}$$

trong đó F là hàm xác định trên miền $D \subset \mathbb{R}^3$.

Nếu từ phương trình 1.1 ta suy ra được

$$y' = f(x, y)$$

thì ta nói phương trình 1.1 là phương trình cấp một giải ra được với đạo hàm.

Định nghĩa 1.1.4. Hàm $y = \varphi(x)$ xác định và khả vi trong một khoảng $(a; b)$ được gọi là nghiệm của phương trình vi phân nếu

- $(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \in D$ với mọi $x \in (a; b)$.
- $F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0$ trên $(a; b)$.

1.1.3 Bài toán Cauchy và ý nghĩa hình học

Tập hợp nghiệm của phương trình vi phân cấp một phụ thuộc vào một hằng số c. Trong thực tế người ta thường tìm nghiệm của phương trình vi phân thỏa mãn một điều kiện nào đó. Chẳng hạn người ta tìm nghiệm của phương trình vi phân sao cho đường cong tích phân đi qua điểm (x_0, y_0) cho trước. Bài toán đó được gọi là **bài toán Cauchy**.

Định nghĩa 1.1.5. Bài toán tìm nghiệm của phương trình vi phân 1.1 sao cho thỏa mãn điều kiện ban đầu $f(x_0) = y_0$ được gọi là bài toán Cauchy.

Nhận xét. Ta xét phương trình vi phân cấp một giải ra đối với đạo hàm. Khi đó mỗi nghiệm của phương trình vi phân cấp một cho một đường cong trong G và được gọi là **đường cong tích phân**.

Vì vậy, bài toán Cauchy là xác định đường cong tích phân đi qua điểm (x_0, y_0) cho trước.

1.2 Sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán Cauchy

Xét phương trình vi phân cấp một đã giải ra đối với đạo hàm

$$y' = f(x, y) \tag{2.1}$$

trong đó f xác định trên một miền $G \subset \mathbb{R}^2$. Khi đó định lý Cauchy- Picar chỉ ra một điều kiện về sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán Cauchy.

Định lý 1.2.1. *Giả sử hàm f thỏa mãn các điều kiện:*

- *f liên tục trong G;*
- *f thỏa mãn điều kiện Lipchitz theo biến y trong G.*

Khi đó với mỗi điểm $(x_0, y_0) \in G$ tồn tại duy nhất một nghiệm của phương trình 2.1 thỏa mãn điều kiện ban đầu $y(x_0) = y_0$.

Hệ quả 1.2.2. *Giả sử hàm f liên tục cùng với đạo hàm riêng $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ trong miền G. Khi đó qua mỗi điểm (x_0, y_0) thì bài toán Cauchy có nghiệm duy nhất.*

1.3 Các loại nghiệm của phương trình vi phân

1.3.1 Nghiệm tổng quát

Ta nói rằng hàm $y = \varphi(x, C)$ là nghiệm **tổng quát** của phương trình vi phân 2.1 nếu

- Từ hệ thức

$$y_0 = \varphi(x_0, C)$$

ta có thể tìm được C.

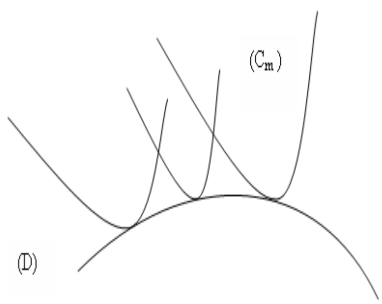
- Với mỗi C ta được một nghiệm của phương trình 2.1.

Ví dụ 1.6. Xét phương trình

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

khi đó $y = Cx$ với $x \neq 0$ là nghiệm tổng quát của phương trình trong miền

$$G = \begin{cases} 0 < & x < +\infty \\ -\infty < & y < +\infty \end{cases}$$



Ví dụ 1.7. Xét phương trình

$$y' = \frac{-x}{y}$$

khi đó trong nửa mặt phẳng trên nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = \sqrt{C - x^2}$$

và nửa mặt phẳng dưới là

$$y = -\sqrt{C - x^2}.$$

1.3.2 Nghiệm riêng

Định nghĩa 1.3.1. Nghiệm của phương trình

$$y' = f(x, y)$$

mà tại mỗi điểm của nó tính duy nhất nghiệm của bài toán Cauchy được đảm bảo được gọi là **nghiệm riêng**.

Nhận xét: Nghiệm nhận được từ nghiệm tổng quát với giá trị C xác định được gọi là nghiệm riêng.

Ví dụ 1.8. Phương trình vi phân

$$y' = \sqrt{1 - y^2}$$

có nghiệm tổng quát là $y = \sin(x + C)$ và $y = \sin(x)$ là một nghiệm riêng.

Ví dụ 1.9. Phương trình

$$y' = \frac{-x}{y}$$

có nghiệm tổng quát là $x^2 + y^2 = C$ và $x^2 + y^2 = 1$ là một nghiệm riêng.

1.3.3 Nghiệm kỳ dị

Định nghĩa 1.3.2. Nghiệm của phương trình $y' = f(x,y)$ mà tại mỗi điểm của nó tính duy nhất của bài toán Cauchy bị phá vỡ được gọi là nghiệm **kỳ dị**.

Nhận xét. Nghiệm kỳ dị không được suy ra từ nghiệm tổng quát với bất kỳ giá trị C cụ thể nào.
Ví dụ 1.10. Phương trình vi phân

$$y' = \sqrt{1 - y^2}$$

nhận $y = \pm 1$ là các nghiệm kỳ dị.

1.4 Phương trình biến số phân ly

1.4.1 Phương trình biến số phân ly

Định nghĩa 1.4.1. Phương trình vi phân với biến số phân ly là phương trình có dạng

$$f(x)dx + g(y)dy = 0 \tag{4.1}$$

trong đó $f(x), g(y)$ là các hàm liên tục theo các biến x, y tương ứng.

- Cách giải: Lấy tích phân ta được nghiệm tổng quát

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = C.$$

Ví dụ 1.11. Giải phương trình

$$\frac{xdx}{x^2+1}+\frac{ydy}{y^2+1}=0.$$

Đáp án: $(1+x^2)(1+y^2)=C$.

Ví dụ 1.12. Giải phương trình

$$y'=xy(x+2).$$

Đáp án: $y=0$ và $y=-2$ là các nghiệm kỳ dị; $|\frac{y}{y+2}|=Cx^2$ với $C>0$ là nghiệm tổng quát.

1.4.2 Phương trình chuyển về biến số phân ly được

- Phương trình vi phân

$$f_1(x)g_1(y)dx+f_2(x)g_2(y)dy=0$$

có thể chuyển về phương trình với biến số phân ly bằng cách

- Xét $g_1(y)=0$ có là nghiệm của phương trình không?
- Xét $f_2(x)=0$ có là nghiệm của phương trình không?
- Chia hai vế của phương trình cho $g_1(y).f_1(x)$ và tích phân hai vế thì

$$\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\int\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy=C.$$

Ví dụ 1.13. Giải phương trình vi phân

$$x(1+y^2)dx+y(1+x^2)dy=0.$$

Vì $(1+x^2)(1+y^2) \neq 0$ nên chia hai vế của phương trình cho $(1+x^2)(1+y^2)$ ta được

$$\frac{x}{1+x^2}dx + \frac{y}{1+y^2}dy = 0.$$

Lấy nguyên hàm hai vế của phương trình trên ta được

$$(1+x^2)(1+y^2) = c^2 \qquad c \neq 0.$$

Ví dụ 1.14. Giải phương trình

$$x\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0.$$

Đáp án: $x = \pm 1$ và $y = \pm 1$ là các nghiệm kỳ dị . Nghiệm tổng quát của phương trình là

$$\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = C.$$

• Phương trình $y' = f(ax+by+c)$ có thể chuyển về phương trình biến số phân ly bằng cách đặt

$$z = ax + by + c.$$

Khi đó $z' = a + by'$.

Ví dụ 1.15. Giải phương trình

$$y' = \cos(x - y - 1).$$

Đáp án: Nghiệm của phương trình có dạng $y = x - 1 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $y = x - 1 - 2\arctan(C - x) + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$.

1.5 Phương trình thuần nhất

Trước hết, ta định nghĩa hàm đẳng cấp bậc k.

Định nghĩa 1.5.1. Hàm hai biến $z = f(x, y)$ được gọi là hàm đẳng cấp bậc k nếu với mọi $t > 0$ thì

$$f(tx, ty) = t^k f(x, y).$$

Ví dụ 1.16. Các hàm $\dfrac{x-2y}{x+y}; \dfrac{x^2+xy}{x+y}; x^2 - 3xy$ là các hàm đẳng cấp bậc 0, 1, 2 tương ứng.

Định nghĩa 1.5.2. Phương trình vi phân

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

được gọi là phương trình thuần nhất (đẳng cấp) nếu $P(x, y), Q(x, y)$ là các hàm đẳng cấp cùng bậc.

Nhận xét. Phương trình

$$y' = f(x, y)$$

là phương trình đẳng cấp nếu $f(x, y)$ là hàm đẳng cấp bậc 0.

★ Cách giải phương trình vi phân thuần nhất:

Đặt $y = zx$ khi đó $y' = z + xz'$ và chuyển phương trình về phương trình biến số phân ly với hàm cần tìm là z.

Ví dụ 1.17. Giải phương trình

$$y' = \frac{y}{x} + \cos\frac{y}{x}.$$

Giải : Đặt $y = zx \to y' = z + xz'$ và thay vào phương trình ta được

$$\frac{dz}{\cos z} = \frac{dx}{x}.$$

Lấy nguyên hàm hai vế ta được

$$\tan\left(\frac{2z+\pi}{4}\right) = cx.$$

Cho nên nghiệm của phương trình là

$$y = x(2\arctan(cx) - \frac{\pi}{2} + k2\pi).$$

Nếu $\cos z = 0$ thì $z = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ khi đó $y = \left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$ là nghiệm của phương trình.

Ví dụ 1.18. Giải phương trình

$$y' = \frac{x^2 - xy + y^2}{xy}.$$

Giải: Đặt $y = zx$ khi đó phương trình được viết lại

$$(1 - z)dx - xzdz = 0.$$

Đây là phương trình biến số phân ly.

Nghiệm tổng quát của phương trình là $x(z-1)e^z = C$ và nghiệm kỳ dị là $z = 1$.

Ví dụ 1.19. Giải phương trình

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + \sqrt{x^2 - y^2}}{x}.$$

Đáp án: $y = \pm x$ là nghiệm kỳ dị.

$\arcsin\dfrac{y}{x} = sign\ln|x| + C$ là nghiệm tổng quát.

★ Phương trình vi phân dạng

$$y' = f\Big(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\Big)$$

có thể chuyển về phương trình đẳng cấp bằng cách chia thành hai trường hợp sau:

- Nếu hai đường thẳng $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ và $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ cắt nhau tại một điểm (x_0, y_0) thì đặt $x = u + x_0; y = v + y_0$. Phương trình được chuyển thành

$$v' = f\Big(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\Big).$$

- Nếu hai đường thẳng $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ và $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ song song. Khi đó đặt $z = a_1x+b_1y$ thì $a_2x+b_2y = \dfrac{z}{\lambda}$. Phương trình được chuyển thành

$$\frac{z - a_1}{b_1} = f\Big(\frac{z + c_1}{\frac{z}{\lambda} + c_2}\Big).$$

Ví dụ 1.20. Giải phương trình

a) $(2x + 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0$.

b) $(x + y + 2)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0$.

Đáp án: a) Nghiệm tổng quát của phương trình $(y - 2x)^3 = C(y - x - 1)^2$.

b) Nghiệm tổng quát của phương trình $x+2y+5\ln|x+y-3| = C$.

1.6 Phương trình vi phân tuyến tính cấp một

Định nghĩa 1.6.1. Phương trình vi phân tuyến tính cấp một là phương trình có dạng

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{6.1}$$

trong đó $p(x), q(x)$ là các hàm liên tục trong G.
Phương trình

$$y' + p(x)y = 0 \tag{6.2}$$

được gọi là phương trình thuần nhất tương ứng.

★ Có 3 phương pháp giải phương trình tuyến tính cấp một.

1.6.1 Phương pháp biến thiên hằng số Lagrange

Các bước tiến hành:

- Xét phương trình thuần nhất tương ứng

$$y' + p(x)y = 0.$$

- Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$y = C.e^{-\int p(x)dx}.$$

- Tìm nghiệm riêng của phương trình 6.1 dưới dạng

$$y = C(x).e^{-\int p(x)dx}.$$

- Nghiệm tổng quát của 6.1 bằng nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất cộng với một nghiệm riêng.

Ví dụ 1.21. Giải phương trình vi phân $y' + y\cos x = e^{-\sin x}$.
Phương trình thuần nhất tương ứng là

$$y' + y\cos x = 0$$

có nghiệm tổng quát là $y = Ce^{-\sin x}$.
Ta tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất dưới dạng $y = c(x)e^{-\sin x}$. Thay vào phương trình ta tìm được $c(x) = x$ cho nên một nghiệm riêng của phương trình không thuân nhất là $y = x.e^{-\sin x}$.
vậy nghiệm tổng quát của phương trình là $y = (x + C)e^{-\sin x}$.
Ví dụ 1.22. Giải phương trình vi phân $y' + \frac{1}{x}y = 3x$ với điều kiện Cauchy $y(1) = 1$
Đáp án: Nghiệm thỏa mãn điều kiện ban đầu là $y = x^2$.
Ví dụ 1.23. Bài toán về dòng điện tự cảm. Giả sử I, U, R lần lượt là cường độ dòng điện, hiệu điện thế và điện trở tại thời điểm t, L là hệ số tự cảm. Khi đó ta có

$$U = I.R + L\frac{dI}{dt}$$

cho nên

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}L = \frac{U}{L}.$$

Kí hiệu I_0 là cường độ dòng điện tại thời điểm t_0. Để tìm quy luật thay đổi của cường độ dòng điện ta tìm nghiệm của phương trình trên với điều kiện ban đầu $I = I_0$ tại $t = t_0$.

Công thức nghiệm tổng quát là

$$I = e^{-\int_{t_0}^{t} \frac{R}{L} d\tau} \left(I_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{U}{L} e^{\int_{t_0}^{t} \frac{R}{L} ds} d\tau\right).$$

Nếu xem U, R, L không đổi thì

$$I = \frac{U}{R} + e^{\frac{-Rt}{L}} \left(I_0 - \frac{U}{R}\right).$$

Khi cho $t \to +\infty$ thì ta được

$$I = \frac{U}{R}$$

đây là nội dung của định luật Ôm.

Ví dụ 1.24. Giải phương trình $2ydx + (y^2 - 2x)dy = 0$.

Hướng dẫn: Ta xem x là hàm theo biến y và chuyển phương trình về phương trình tuyến tính cấp một theo x. Giải phương trình ta được $x = Cy - \dfrac{y^2}{2}$.

1.6.2 Phương pháp Bernoulli

Các bước tiến hành như sau:

- Tìm nghiệm của phương trình dưới dạng $y = u(x).v(x)$.
- Thay vào phương trình thì

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x).$$

- Chọn $u(x)$ là nghiệm của phương trình $u' + p(x)u = 0$.

- Khi đó nghiệm tổng quát của phương trình là

$$v(x) = C + \int q(x).e^{\int p(x)dx} dx.$$

Ví dụ 1.25. Tìm nghiệm riêng của phương trình

$$y' \sin x - y \cos x = \frac{-\sin^2 x}{x^2}$$

với điều kiện $x \to \infty, y \to 0$.

Giải : ta tìm nghiệm của phương trình dưới dạng $y = u(x).v(x)$ thay vào phương trình ta được

$$u'v \sin x + uv' \sin x - uv \cos x = \frac{-\sin^2 x}{x^2}.$$

Chọn $u(x)$ là nghiệm của phương trình

$$u' \sin x - u \cos x = 0.$$

Có thể chọn $u = \sin x$. Vậy ta có phương trình

$$v' \sin^2 x = \frac{-\sin^2 x}{x^2} \to v = C + \frac{1}{x}.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là $y = C \sin x + \dfrac{\sin^2 x}{x}$.
Thay điều kiện thì $C = 0 \to y = \dfrac{\sin x}{x}$.

1.6.3 Phương pháp thừa số tích phân

Các bước tiến hành:

- Nhân hai vế phương trình cho $e^{p(x)dx}$ thì

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{\int p(x)dx}\right) = q(x).e^{\int p(x)dx}$$

- Lấy nguyên hàm hai vế thì

$$y = e^{-\int p(x)dx}\Big(C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\Big).$$

Ví dụ 1.26. Giải phương trình $y' + y\tan x = \dfrac{1}{\cos x}$.
Giải: Nhân hai vế của phương trình cho $\dfrac{1}{\cos x}$ ta được

$$\frac{1}{\cos x}y' + y\frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2}.$$

Viết phương trình trên dưới dạng

$$\frac{d}{dx}\Big(y\frac{1}{\cos x}\Big) = \frac{1}{\cos^2}.$$

Lấy nguyên hàm hai vế ta được nghiệm tổng quát của phương trình là $y = C\cos x + \sin x$.
Ví dụ 1.27. Giải phương trình $y'(x + y^2) = y$.
Hướng dẫn: Xem x là hàm theo biến y và nghiệm tổng quát cua phương trình là $x = Cy + y^2$.

1.7 Phương trình vi phân Bernoulli

Định nghĩa 1.7.1. Phương trình vi phân Bernoulli là phương trình có dạng

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha$$

trong đó $p(x), q(x)$ là các hàm liên tục trên khoảng $(a; b)$.

Nhận xét. Nếu $\alpha = 0$ thì phương trình trở thành phương trình tuyến tính cấp một.

Nhận xét. Nếu $\alpha = 1$ thì phương trình trở thành phương trình đẳng cấp cấp một.

Cách giải phương trình vi phân Bernoulli:

- Xét trường hợp $y = 0$.
- Khi $y \neq 0$ chia hai vế phương trình cho y^{α}.
- Đặt $z = y^{1-\alpha}$ và chuyển phương trình thành

$$z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x).$$

  Đây là phương trình tuyến tính cấp một theo biến z.

Ví dụ 1.28. Giải phương trình

$$y' - \frac{2y}{x} = y^2.$$

Giải: $y = 0$ là một nghiệm của phương trình.

Khi $y \neq 0$ thì đặt $u = \dfrac{1}{y} \rightarrow u' = \dfrac{-y'}{y^2}$ thế vào phương trình ta được

$$u' + \frac{2u}{x} = -1.$$

Đây là phương trình tuyến tính cấp một. Giải phương trình ta được

$$u = \frac{c_1}{x^2} - \frac{x}{3} \rightarrow y = \frac{1}{x} + \frac{3x^2}{c_2 - x^3}.$$

Ví dụ 1.29. Giải phương trình $y' + \frac{1}{x}y = xy^2$.
Hương dẫn: Nghiệm tổng quát của phương trình là $y = \frac{1}{-x^2 + Cx}$.
Ví dụ 1.30. Giải phương trình $\frac{dy}{dx}x^3 \sin y + 2y = x\frac{dy}{dx}$.
Hướng dẫn: $y = 0$ là nghiệm. Xem x là hàm theo biến y và nghiệm tổng quát của phương trình là $y = (C - \cos y)x^2$.
Ví dụ 1.31. Tìm các đường cong mà với mỗi điểm M trên đồ thị, tiếp tuyến tại M cắt Oy tại B thì $OB = MP^2$ với P là hình chiếu vuông góc của M lên trục hoành.
Hướng dẫn: Nghiệm tổng quát của phương trình là $y = \frac{x}{C + x}$.
Nghiệm riêng $y = 0$.

1.8 Phương trình vi phân Dacbu

Định nghĩa 1.8.1. Phương trình vi phân **Dacbu** là phương trình có dạng

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy + P(x, y)(xdy - ydx) = 0 \qquad (1.8)$$

trong đó M, N là các hàm thuần nhất bậc α và P là hàm thuần nhất bậc β.

- Cách giải: • Nếu $\beta = \alpha - 1$ thì phương trình trở thành phương trình thuần nhất.
  • Đăt $y = xz$ chuyển phương trình về phương trình Bernoulli.

Ví dụ 1.32. Giải phương trình vi phân Dacbu

$$xdx + ydy + x^2(xdy - ydx) = 0.$$

- Đây là phương trình vi phân Dacbu với $\alpha = 1, \beta = 2$
  - Đặt $y = xz$ và chuyển phương trình về $(1 + z^2)dx + (xz + x^3)dz = 0$.
  - Chuyển về phương trình Bernoulli

$$\frac{dx}{dz} + \frac{z}{1+z^2}x = \frac{-1}{1+z^2}x^3.$$

Ví dụ 1.33. Giải phương trình $xy' - y = x\sqrt{x^2 - y^2}$.

Hương dẫn: Đây là phương trình vi phân Dacbu. Nghiệm tổng quát của phương trình là $y = x\sin(x + C)$.

1.9 Phương trình vi phân Ricati

Định nghĩa 1.9.1. Phương trình vi phân **Ricati** là phương trình có dạng

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) \tag{1.9}$$

trong đó P, Q, R là các hàm liên tục trên $(a; b)$.

- Phương trình vi phân Ricati chỉ giải được trong những trường hợp riêng.
- Trường hợp P, Q, R là các hằng số thì phương trình chuyển về biến số phân li.

- Nếu biết được một nghiệm riêng của phương trình (1.9) thì có thể chuyển về phương trình Bernoulli với phép đặt

$$y = y_1(x) + z.$$

Ví dụ 1.34. Giải phương trình

$$y' = xy^2 + x^2y - 2x^3 + 1.$$

- Phương trình nhận $y = x$ là một nghiệm riêng.

- Đặt $y = x + z = x + \dfrac{1}{u}$.
- Phương trình chuyển về phương trình tuyến tính cấp một

$$u' + 3x^2u = -x.$$

- Nghiệm tổng quát của phương trình $u = e^{-x^3}(C - \int xe^{x^3}dx)$.
- Nghiệm của phương trình $y = x + \dfrac{e^{x^3}}{C - \int xe^{x^3}dx}$.

Ví dụ 1.35. Giải phương trình $y' + y^2 = \dfrac{2}{x^2}$.
Hướng dẫn: Trước hết, tìm nghiệm của phương trình dạng $y = \dfrac{a}{x}$.
Đồng nhất với phương trình thì $a = -1$ hoặc $a = 2$. Khi $a = -1$ thì $y = \dfrac{-1}{x}$ là một nghiệm riêng.
Đặt $y = z - \dfrac{1}{x}$. Thay vào phương trình thì

$$z' - \frac{2}{x}z = -z^2.$$

Đây là phương trình vi phân Bernoulli. Giải phương trình suy ra được nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = \frac{2x^3 - C}{x(x^3 + C)} \qquad ; y = \frac{-1}{x}.$$

1.10 Phương trình vi phân toàn phần

Định nghĩa 1.10.1. Phương trình vi phân

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{1.10}$$

được gọi là phương trình vi phân toàn phần nếu tồn tại hàm $U(x, y)$ sao cho vi phân toàn phần

$$dU(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy.$$

Định lý 1.10.1. *Điều kiện cần và đủ để phương trình vi phân (1.10) là phương trình vi phân toàn phần là*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

- Nếu (1.10) là phương trình vi phân toàn phần thì
  - $U(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)dy.$
  - $U(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)dy.$

Ví dụ 1.36. Giải phương trình

$$(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3) = 0.$$

- Vì $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x} = 12xy$ nên phương trình vi phân toàn phần.
- Chọn $(x_0, y_0) = (0, 1)$ thì $U(x, y) = \displaystyle\int_0^1 (3x^2 + 6xy^2)dx + \int_1^y 4y^3 dy$.
- Tính tích phân $U(x, y) = x^3 + 3x^2y^2 + y^4 - 1$.
- Nghiệm tổng quát của phương trình là $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C$.

Ví dụ 1.37. Giải phương trình

$$(\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2})dx + (\frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y})dy = 0.$$

Hướng dẫn: Kiểm tra rằng phương trình trên là phương trình vi phân toàn phần.

Chọn $(x_0, y_0) = (1, 2)$ thì ta được nghiệm tổng quát là

$$\ln\frac{x}{y} + \frac{xy}{x-y} = C.$$

1.11 Thừa số tích phân

Định nghĩa 1.11.1. Xét phương trình vi phân

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \qquad (1.11.1)$$

không là phương trình vi phân toàn phần.

Hàm số $\mu = \mu(x, y)$ được gọi là **thừa số tích phân** nếu

$$\mu P(x, y)dx + \mu Q(x, y)dy = 0 \qquad (1.11.2)$$

là phương trình vi phân toàn phần.

- Nếu $U(x,y) = C$ là nghiệm tổng quát của phương trình (1.11.2) thì U cũng là nghiệm của phương trình (1.11.1).

- Nếu phương trình (1.11.1) có tích phân tổng quát thì tồn tại thừa số tích phân.

- Cách tìm thừa số tích phân:
  - Vì (1.11.2) là phương trình vi phân toàn phần nên
$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} \Leftrightarrow \mu\frac{\partial P}{\partial y} + P\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\frac{\partial Q}{\partial x} + Q\frac{\partial \mu}{\partial x}.$$

- a) Nếu $\frac{1}{Q}(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}) = F_1(x)$ là hàm theo biến x thì
$$\mu = e^{\int F_1(x)dx}.$$

- b) Nếu $\frac{1}{P}(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) = F_2(y)$ là hàm theo biến y thì
$$\mu = e^{\int F_2(y)dy}.$$

Ví dụ 1.38. Giải phương trình vi phân $(1-x^2y)dx + x^2(y-x)dy = 0$.

Hướng dẫn: Kiểm tra được rằng
$$\frac{\partial P}{\partial y} = -x^2; \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy - 3x^2.$$
Do đó, phương trình không là phương trình vi phân toàn phần. Tuy nhiên, $\frac{1}{Q}(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}) = \frac{-2}{x}$ là hàm theo biến x nên thừa số

tích phân là

$$\mu = e^{-2\int \frac{dx}{x}} = \frac{1}{x^2}.$$

Nhân hai vế cho thừa số tích phân và tích phân phương trình ta được

$$\frac{1}{x} + xy - \frac{y^2}{2} = C$$

là nghiệm tổng quát của phương trình.

Ví dụ 1.39. Tìm thừa số tích phân và giải phương trình vi phân

a) $(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3})dx + (x^2 + y^2)dy = 0.$

b) $y(1 + xy)dx - xdy = 0.$

BÀI TẬP CHƯƠNG I

1. Giải các phương trình vi phân sau:

a. $xy' - 2y = 2x^4.$

b. $y' + y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}.$

2. Chứng minh rằng phương trình

$$y' + ay = p(x)$$

trong đó a là hằng số và $p(x)$ là đa thức bậc m, có nghiệm riêng dạng $y_1(x) = Q(x)$- đa thức bậc m.

3. Chứng minh rằng phương trình tuyến tính

$$y' + p(x)y = q(x)$$

có nghiệm riêng dạng $y = b$ là phương trình biến số phân ly.

4. Tìm nghiệm của các bài toán Cauchy sau:

a. $y - 2xy = 1$ thỏa điều kiện $y(0) = 0$.

b. $y' + \dfrac{3}{x}y = \dfrac{2}{x^3}$ với điều kiện $y(1) = 1$.

c. $xy' = x + 2y$ với điều kiện $y(0) = 0$.

d. $xy' = x + \dfrac{y}{2}$ với điều kiện $y(0) = 0$.

5. Tìm những đường cong mà diện tích của tam giác lập bởi trục Ox, tiếp tuyến và và bán kính vectơ của tiếp điểm có diện tích không đổi bằng a^2.

6. Chứng minh rằng nghiệm của phương trình tuyến tính

$$y' + p(x)y = q(x)$$

với các giá trị ban đầu (x_0, y_0) có thể viết dưới dạng

$$y = y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} p(\tau)d\tau} + \int_{x_0}^{x} q(\xi) e^{-\int_{\xi}^{x} p(\tau)d\tau} d\xi.$$

7. Tìm nghiệm giới nội khi $x \to \dfrac{\pi}{2}$ của phương trình

$$y' \sin 2x = 2(y + \cos x).$$

8. Đưa phương trình

$$y' + P(x) = Q(x)e^{my}$$

trong đó $P(x), Q(x)$ là các đa thức và m là hằng số, về phương trình tuyến tính cấp một.

Chương 2

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT CHƯA GIẢI RA ĐẠO HÀM

2.1 Các phương trình vi phân cấp một chưa giải ra đạo hàm dạng đặc biệt

2.1.1 Phương trình dạng $\frac{dy}{dx} = f_i(x, y)$

Nếu các phương trình đã giải ra đạo hàm có thể giải được bằng cầu phương thì phương trìh có thể tích phân được.
Ví dụ 2.1. Giải phương trình

$$y'^2 - (x + y)y' + xy = 0.$$

Hướng dẫn: Giải phương trình này theo ẩn y' ta được

$$y' = x; \qquad y' = y.$$

- Với $y' = x$ thì họ nghiệm của phương trình là

$$y = \frac{x^2}{2} + C.$$

- Với $y' = y$ thì họ nghiệm của phương trình là

$$y = Ce^x.$$

Ngoài ra, phương trình đã cho còn có nghiệm là sự kết hợp của hai họ nghiệm trên như sau

$$y = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{2} & \text{nếu} \quad -\infty < x \leqslant 1 \\ \dfrac{e^x}{x} & \text{nếu} \quad 1 \leqslant x < +\infty \end{cases}$$

và

$$y = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} & \text{nếu} \quad x \leqslant 0 \\ 0 & \text{nếu} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$$

2.1.2 Phương trình dạng $F(x, y') = 0$

- Nếu từ phương trình giải ra $y' = f(x)$ thì nghiệm của phương trình là $y = \int f(x)dx$.
- Nếu từ phương trình giải ra $x = \varphi(y')$ thì nghiệm của phương trình được tìm dưới dạng tham số. Đặt $y' = p$ khi đó $dy = pdx = p\varphi'(p)dp$.

Nghiệm của phương trình là

$$\begin{cases} x = & \varphi(p) \\ y = & \displaystyle\int p\varphi'(p)dp + C \end{cases}$$

Ví dụ 2.2. Giải phương trình

$$e^{y'} + y' - x = 0.$$

Hướng dẫn: Từ phương trình thì $x = e^{y'} + y'$. Đặt $y' = p$ và suy ra $x = e^p + p$.

Từ đó suy ra

$$dy = p(e^p + 1)dp$$

do đó

$$y = pe^p - e^p + \frac{p^2}{2} + C.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là

$$\begin{cases} x = & e^p + p \\ y = & pe^p - e^p + \dfrac{p^2}{2} + C \end{cases}$$

Nếu từ phương trình suy ra $x = \varphi(t)$ và $y' = \xi(t)$ thì nghiệm của phương trình cho dưới dạng tham số

$$\begin{cases} x = & \varphi(t) \\ y = & \displaystyle\int \xi(t)\varphi'(t)dt + C \end{cases}$$

Ví dụ 2.3. Giải phương trình $x^3 + y'^3 - 3xy' = 0$.

Hướng dẫn: Phép tham số hóa của phương trình là

$$x = \frac{3t}{t^3+1}; y' = \frac{3t^2}{t^3+1}.$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình là

$$\begin{cases} x = & \dfrac{3t}{t^3+1} \\ y = & -\dfrac{9}{2(t^3+1)^2} + \dfrac{6}{t^3+1} + C. \end{cases}$$

2.1.3 Phương trình không chứa biến số độc lập

★ Nếu từ phương trình suy ra $y' = f(y)$ khi đó tích phân tổng quát là

$$\int \frac{dy}{f(y)} = x + C.$$

★ Nếu từ phương trình suy ra $y = \varphi'(y)$ khi đó đặt $y' = p$ và suy ra được $x = \displaystyle\int \frac{\varphi'(p)}{p} dp + C$.

Ví dụ 2.4. Giải phương trình

$$y' + \ln y' - y = 0.$$

Hướng dẫn: Đặt $y' = p$ thì $y = p + \ln p$.

mà

$$dx = \frac{dy}{y'} = \Big(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}\Big) dp.$$

Cho nên $x = \ln p - \frac{1}{p} + C$. Do đó nghiệm tổng quát của phương trình là

$$\begin{cases} x = & \ln p - \dfrac{1}{p} + C \\ y = & p + \ln p \end{cases}$$

- Trường hợp $F(x, y, y') = 0$ và có được biểu diễn

$$x = \varphi(u, v), y = \xi(u, v); y' = \psi(u, v)$$

  thì nghiệm được tìm dưới dạng tham số $x = \varphi(u, \omega(u, C)), y = \psi(u, \omega(u, C))$.

- Trường hợp $y = \varphi(x, y')$. Đặt $u = x; v = y' = p$ suy ra được $p\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{dp}{dx}$. Suy ra $p = \omega(x, C)$ nên nghiệm của phương trình là

$$y = \varphi(x, \omega(x, C)).$$

2.2 Phương trình Lagrange và phương trình Clero

2.2.1 Phương trình Lagrange

Định nghĩa 2.2.1. Phương trình vi phân Lagrange là phương trình có dạng

$$y = \varphi(y')x + \psi(y').$$

- Đặt $y' = p$ suy ra $y = x\varphi(p) + \psi(p)$.

- $pdx = \varphi(p)dx + (x\varphi'(p) + \psi'(p))dp$ hay

$$(\varphi(p) - p)dx + (x\varphi'(p) + \psi'(p))dp = 0.$$

- $\dfrac{dx}{dp} + \dfrac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p}x = \dfrac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}$.
- Giải phương trình tuyến tính cấp một suy ra $x = G(p, C)$.
- Nghiệm của phương trình được cho dưới dạng tham số $x = G(P, C); y = \varphi(p)G(p, C) + \psi(p)$.

Ví dụ 2.5. Giải phương trình

$$y = xy'^2 - y'^2.$$

Hướng dẫn: Đặt $y' = p$ khi đó $dy = y'dx$ cho nên

$$2pdx + (2x - 2p)dx = pdx.$$

Chuyển phương trình về dạng

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x = 2.$$

Giải phương trình vi phân ta được nghiệm có dạng tham số

$$\begin{cases} x = & \dfrac{C}{p^2} + \dfrac{2p}{3} \\ y = & \dfrac{2C}{p} + \dfrac{p^2}{3}. \end{cases}$$

2.2.2 Phương trình Clero

Định nghĩa 2.2.2. Phương trình Clero là phương trình có dạng

$$y = xy' + \psi(y').$$

- Đặt $y' = p$ thì $y = px + \psi(p)$.
- $pdx = pdx + (x + \psi'(p))dp$ cho nên $p = C$.
- Nghiệm tổng quát của phương trình là $y = Cx + \psi(C)$.

Ví dụ 2.6. Giải phương trình $y = y = xy' - e^{y'}$.

Hướng dẫn: Đặt $p = y'$ suy ra $y = xp - e^p$. Lấy vi phân thì

$$dy = pdx + xdp - e^p dp.$$

Mà $dy = y'dx = pdx$ cho nên

$$(x - e^p)dp = 0.$$

• Nếu $dp = 0$ hay $p = C$ thì nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = Cx - e^C.$$

• Nếu $x = e^p$ thì $y = (p-1)e^p$. Do đó nghiệm của phương trình được cho dưới dạng tham số

$$\begin{cases} x = & e^p \\ y = & (p-1)e^p. \end{cases}$$

Ví dụ 2.7. Giải phương trình

$$y = xy' - \frac{1}{4}y'^2.$$

BÀI TẬP CHƯƠNG II

1. Giải các phương trình vi phân sau đây:

a. $y.y'^2 + y'(x - y) = x$.

b. $xy'^3 = 1 + y'$.

c. $y(1 + y'^2) = 2a$.

2. Giải các phương trình vi phân dạng Lagrange hoặc Clero sau:

a. $y = 2xy' + y^2y'^3$.

b. $y = xy'^2 + y'^3$.

c. $y = 2xy' + \dfrac{x^2}{2} + y'^2$.

3. Tìm các đường cong sao cho độ dài của đoạn thẳng tiếp tuyến bị chắn giữa các trục tọa độ là đại lượng không đổi a.

4. Tìm đường cong sao cho mỗi tiếp tuyến của nó cắt trên hai trục tọa độ những đoạn thẳng mà tổng các đại lượng nghịch đảo của bình phương độ dài các đoạn thẳng đó bằng 1.

5. Tìm các đường cong sao cho tích các khoảng cách từ hai điểm cố định cho trước đến tiếp tuyến bất kỳ là đại lượng không đổi.

Chương 3

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP CAO

3.1 Các khái niệm mở đầu

Định nghĩa 3.1.1. Phương trình vi phân cấp n có dạng

$$F(x.y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0. \tag{1.1}$$

Nếu từ (1.1) giải được đạo hàm cấp cao nhất, tức là

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) \tag{1.2}$$

thì ta được phương trình giải ra với đạo hàm câp cao nhất.

Định nghĩa 3.1.2. Nghiệm của phương trình (1.1) là hàm $y = \varphi(x)$ khả vi n lần trên khoảng $(a; b)$ sao cho

a) $(x, \varphi(x), \varphi'(x), \cdots, \varphi^{(n)}(x)) \in G, \forall x \in (a; b)$.

b) $\varphi(x)$ nghiệm đúng phương trình (1.1).

Ví dụ 3.1. Phương trình $y'' - 4y = 0$ có nghiệm tổng quát là $\varphi(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$ trong đó C_1, C_2 là các hằng số bất kỳ.

Ví dụ 3.2. Phương trình $y'' + y = 0$ có nghiệm thỏa mãn điều kiện ban đầu $y(0) = 1, y'(0) = 0$ là $y = \cos x$. **Nhận xét.** Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân cấp hai phụ thuộc vào hai hằng số C_1, C_2. Tổng quát nghiệm của phương trình vi phân cấp n phụ thuộc vào n hằng số $C_1, C_2, \cdots, C_n$.

Trong thực tế, người ta thường quan tâm đến nghiệm của phương trình vi phân thỏa mãn một điều kiện nào đó. Một trong những điều kiện đó là

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Đây là bài toán Cauchy.

3.2 Định lý về sự tồn tại và duy nhất nghiệm

Xét phương trình vi phân cấp n

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) \tag{2.1}$$

Định lý sau cho một điều kiện đủ để bài toán Cauchy có nghiệm duy nhất.

3.2.1 Định lý về sự tồn tại và duy nhất nghiệm

Định lý 3.2.1. *Giả sử trong miền $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ hàm $f(x, u_1, \cdots, u_n)$ liên tục và thỏa mãn điều kiện Lipchitz theo $u_1, u_2, \cdots, u_n$. Khi đó với bất kỳ điểm $(x_0, y_0, y_0', \cdots, y_0^{(n-1)}) \in G$ tồn tại duy nhất nghiệm $y = y(x)$ của phương trình thỏa mãn điều kiện ban đầu*

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Hệ quả 3.2.2. *Giả sử trong miền $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ hàm $f(x, u_1, \cdots, u_n)$ liên tục cùng với các đạo hàm riêng $\dfrac{\partial f}{\partial u_1}, \dfrac{\partial f}{\partial u_2}, \cdots, \dfrac{\partial f}{\partial u_n}$. Khi đó với bất kỳ điểm $(x_0, y_0, y_0', \cdots, y_0^{(n-1)}) \in G$ tồn tại duy nhất nghiệm $y = y(x)$ của phương trình thỏa mãn điều kiện ban đầu*

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

3.2.2 Các loại nghiệm của phương trình vi phân cấp n

Khi giải phương trình vi phân câp n thì có thể nhận được các loại nghiệm sau:

Định nghĩa 3.2.1. Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân cấp n là nghiệm dưới dạng ẩn

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \cdots, C_n) = 0.$$

Định nghĩa 3.2.2. Nghiệm của phương trình vi phân (2.1) mà tại mỗi điểm của nó, tính duy nhất nghiệm của bài toán Cauchy được đảm bảo được gọi là nghiệm riêng của phương trình. Nghiệm nhận được từ phương trình tổng quát các giá trị xác định của $C_1, C_2, \cdots, C_n$ được gọi là nghiệm riêng.

Định nghĩa 3.2.3. Nghiệm của phương trình vi phân mà tại mỗi điểm của nó, tính duy nhất nghiệm của bài toán Cauchy bị phá vỡ được gọi là nghiệm kỳ dị.
Nghiệm kỳ dị của phương trình vi phân cấp n có thể phụ thuộc hằng số. Nhưng số hằng số phụ thuộc không vượt quá $n - 1$.

Ví dụ 3.3. Xét phương trình

$$y'' = 2\sqrt{y'}.$$

Đặt $z = y'$ và xem z như là hàm cần tìm thì

$$z' = 2\sqrt{z}.$$

Giải phương trình thì ta được nghiệm tổng quát

$$z = (x + C_1)^2.$$

Thay $z = y'$ thì $y' = (x + C_1)^2$.
Vì vậy,

$$y = \frac{1}{3}(x + C_1)^3 + C_2.$$

Đây là nghiệm tổng quát của phương trình. Ngoài ra, phương trình còn có nghiệm kỳ dị là $y = C$.

3.3 Tích phân trung gian- tích phân đầu

Định nghĩa 3.3.1. Xét phương trình

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0 \tag{1.1}$$

khi tích phân phương trình ta được hệ thức chứa hằng số và các đạo hàm cấp thấp hơn n dạng

$$\varphi(x, y, y', \cdots, y^{n-1}, C_1, C_2, \cdots, C_k) = 0, \tag{3.1}$$

Hệ thức (3.1) được gọi là **tích phân trung gian** của phương trình (1.1).
Trường hợp $k = 1$ ta có hệ thức dạng

$$\varphi(x, y, y', \cdots, y^{n-1}, C_1) = 0 \tag{3.2}$$

được gọi là **tích phân đầu**.

3.4 Phương trình vi phân cấp cao giải được bằng cầu phương

3.4.1 Phương trình chỉ chứa biến số độc lập và đạo hàm cấp cao nhất.

Định nghĩa 3.4.1. Phương trình chỉ chứa biến số độc lập và đạo hàm cấp cao nhất là phương trình có dạng

$$F(x, y^n) = 0. \tag{4.1}$$

- Nếu từ (4.1) giải ra được $y^{(n)} = f(x)$ thì y sẽ tìm được qua n lần cầu phương.

- Nếu từ (4.1) giải ra được $x = \varphi(y^n)$ khi đó đặt $y^{(n)} = p$ và xem p là tham số.
  Vì $dy^{n-1} = y^n dx = p\varphi'(p)dp$ nên $y^{n-1} = \int p\varphi'(p)dp$.
  Tương tự, qua n lần cầu phương ta được $y = \psi(p, C_1, C_2, \cdots, C_n)$.

- Nếu từ (4.1) ta biểu diễn được x, y^n qua tham số $x = \varphi(t)$ và $y^{(n)} = \psi(t)$ khi đó $dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx = \psi(t)\varphi'(t)dt$. Nghiệm được tìm cho dưới dạng tham số.

Ví dụ 3.4. Giải phương trình $y'' = xe^x$.

Hướng dẫn: Tích phân phương trình hai lần ta được

$$y = (x-2)e^x + C_1x + C_2.$$

Ví dụ 3.5. Giải phương trình $x - e^{y''} + y''^2 = 0$.

Hướng dẫn: Đặt $y'' = t$ thì $x = e^t - t^2$. Hơn nữa, $y'' = t$ nên $dy' = y''dx = t(e^t - 2t)dt$.

Do đó

$$y' = \int t(e^t - 2t)dt + C_1 = e^t(t-1) - \frac{2t^3}{3} + C.$$

Vì vậy, $y = \int (e^t(t-1) - \frac{2t^3}{3} + C)(e^t - 2t)dt + C_2$.

Nghiệm của phương trình được cho dưới dạng tham số.

Ví dụ 3.6. Giải phương trình $y^{(3)} - 4x^2 = 0$.

Hướng dẫn: Nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = \frac{x^5}{15} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3.$$

Ví dụ 3.7. Giải phương trình $e^{y''} + y'' - x = 0$.

Hướng dẫn: Nghiệm của phương trình cho dưới dạng tham số

$$\begin{cases} x &= e^p + p \\ y &= (\frac{p}{2} - \frac{3}{4})e^{2p} + (\frac{p^2}{2} + C_1 - 1)e^p + \frac{p^3}{6} + C_1p + C_2. \end{cases}$$

Ví dụ 3.8. Giải phương trình $(y^{(3)})^2 + x^2 = 1$.

Hướng dẫn: Nghiệm của phương trình cho dưới dạng tham số

$$\begin{cases} x &= \cos t \\ y &= \frac{-t\cos 2t}{8} + \frac{5t}{16} - \frac{5\sin 2t}{48} + \frac{\sin 4t}{192} + \frac{C_1\cos 2t}{4} + C_2\cos t + C_3. \end{cases}$$

3.4.2 Phương trình chỉ chứa đạo hàm cấp n và cấp $(n-1)$.

Định nghĩa 3.4.2. Phương trình chỉ chứa đạo hàm cấp n và cấp $(n-1)$ là phương trình có dạng

$$F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0. \tag{4.2}$$

★ Nếu từ (4.2) ta giải ra được $y^{(n)} = f(y^{(n-1)})$. Đặt $y^{(n-1)} = z$ và xem z như hàm số mới tìm. Khi đó $z' = f(z)$.Giải phương trình vi phân cấp một ta được $z = g(x, C_1)$. Thay $z = y^{(n-1)}$ ta quy về 4.1.

★ Nếu từ (4.2) ta có thể biểu diễn $y^{(n-1)}$ qua $y^{(n)}$. Khi đó đặt

$y^{(n)} = p$ và xem p như tham số ta được

$$y^{(n-1)} = f(p).$$

Vì $dx = \dfrac{dy^{(n-1)}}{y^{(n)}} = \dfrac{f'(p)dp}{p}$ nên

$$x = \int \frac{f'(p)}{p} dp + C_1$$

Khi đó phương trình quy về (4.1) với

$$\begin{cases} x & = \varphi(p, C_1) \\ y^{(n-1)} & = f(p). \end{cases}$$

Ví dụ 3.9. Giải phương trình

$$y'' + (1 + y'^2)^{3/2} = 0.$$

Đặt $y' = z$ ta có

$$z' = -(1 + z^2)^{3/2}.$$

Giải phương trình ta được nghiệm tổng quát của phương trình cho dưới dạng tham số

$$\begin{cases} x & = -\sin\varphi + C_1 \\ y & = \cos\varphi + C_2 \end{cases}$$

hay $(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = 1$. Vậy họ đường cong là đường tròn bán kính 1 có tâm tùy ý.

3.5 Phương trình vi phân cấp cao hạ cấp được

3.5.1 Phương trình không chứa hàm phải tìm và các đạo hàm của nó đến cấp k.

Định nghĩa 3.5.1. Phương trình không chứa hàm phải tìm và các đạo hàm của nó đến cấp k là phương trình có dạng

$$F(x, y^k, y^{(n+1)}, \cdots, y^{(n)}) = 0. \tag{5.1}$$

- Đặt $y^{(k)} = z$ và xem z như hàm số mới ta đưa phương trình về dạng $F(x, z, z', \cdots, z^{(n-k)}) = 0$.
- Giải phương trình ta được $z = \omega(x, C_1, C_2, \cdots, C_k)$.
- Thay $z = y^{(k)}$ ta quy về 4.

Ví dụ 3.10. Xét phương trình $4y' + y''^2 = 4xy''$.

- Đặt $z = y'$ ta được phương trình $4z + z'^2 = 4xz'$ hay $z = xz' - \dfrac{z'^2}{4}$.
- Đây là phương trình Clero. Nghiệm tổng quát là $z = C_1x - \dfrac{C_1^2}{4}$.
- Thay $z = y'$ ta ta được $y' = C_1x - \dfrac{C_1^2}{4}$.
- Cho nên $y = \dfrac{C_1}{2}x^2 - \dfrac{C_1^2}{4}x + C_2$.

3.5.2 Phương trình không chứa biến số độc lập.

Định nghĩa 3.5.2. Phương trình không chứa biến số độc lập là phương trình có dạng

$$F(y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0.$$

- Đặt $y' = z$ và xem z như hàm số mới.
- Biểu diễn $y'' = \dfrac{dy'}{dx} = \dfrac{d}{dx}z = \dfrac{dz}{dy}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dz}{dy}z.$
- Biểu diễn $y^{(3)} = (\dfrac{d^2z}{dy^2}z + (\dfrac{dz}{dx})^2)z.$
- $\cdots$
- $y^{(n)} = \omega(z, \dfrac{dz}{dy}, \dfrac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}}).$
- Đây là phương trình vi phân cấp $n-1$.
- Giải phương trình ta được nghiệm tổng quát

$$z = \psi(y, C_1, C_2, \cdots, C_{n-1}).$$

- Do đó

$$y' = \psi(y, C_1, C_2, \cdots, C_{n-1}).$$

- Tích phân phương trình ta được nghiệm tổng quát của phương trình.

Ví dụ 3.11. Giải phương trình $(1 + y^2)yy'' = (3y^2 - 1)y'^2$.

- Đặt $z = y'$ và suy ra $y'' = z\dfrac{dz}{dy}$.
- Thay vào phương trình thì

$$\frac{dz}{z} = \frac{3y^2 - 1}{y(1+y^2)}dy.$$

- Suy ra $\dfrac{yz}{(1+y^2)^2} = C_1$.
- Thay $z = y'$ thì $\dfrac{1}{1+y^2} = -2C_1x + C_2$.

BÀI TẬP CHƯƠNG III

1. Giải các phương trình vi phân sau:

a. $y^{(3)} - \ln x = 0$.

b. $y'' = \dfrac{1}{\sqrt{y}}$.

c. $y^{(3)} = (1 + y''^2)^{1/2}$.

d. $yy'' - y^{(4)} - y'^2 = 0$.

2. Cho phương trình $y^{(4)} = f(x)$ trong đó

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{nếu} \quad |x| < 1 \\ 0 & \text{nếu} \quad |x| > 1 \end{cases}$$

Chứng minh rằng nghiệm $y(x)$ của phương trình trên với điều kiện ban đầu

$$y(0) = y'(0) = y^{(2)}(0) = y^{(3)}(0) = 0$$

có dạng

$$y(x) = \frac{1}{6}\int_0^{\tau} |t|(x-t)^3 dt$$

trong đó

$$u = \begin{cases} x & \text{nếu} \quad |x| < 1 \\ \text{sign}x & \text{nếu} \quad |x| > 1 \end{cases}$$

Chương 4

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH CẤP n

4.1 Định nghĩa và các tính chất cơ bản

Định nghĩa 4.1.1. Phương trình vi phân **tuyến tính cấp** n là phương trình có dạng

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x).y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = g(x) \qquad (1.1)$$

và phương trình

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x).y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = 0 \qquad (1.2)$$

được gọi là **phương trình thuần nhất tương ứng.**

4.2 Lý thuyết tổng quát về phương trình tuyến tính thuần nhất cấp n

- Xét phương trình tuyến tính cấp n

$$L(y) = y^{(n)} + p_1(x).y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = 0 \qquad (1.2)$$

- Nếu $y(x)$ là nghiệm của (1.2) thì $C.y(x)$ cũng là nghiệm của (1.2).

- Nếu $y_1(x), y_2(x)$ là các nghiệm của (1.2) thì $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ cũng là nghiệm của (1.2).

Định nghĩa 4.2.1. Hệ hàm $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)$ được gọi là độc lập tuyến tính trên khoảng (a,b) nếu

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \cdots + \alpha_n\varphi_n(x) = 0$$

thì $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Ví dụ 4.1. a) Hệ hàm $\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$ là độc lập tuyến tính trên $\mathbb{R}$.
b) Hệ hàm $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \cdots, e^{\lambda_n x}\}$ là độc lập tuyến tính trên $\mathbb{R}$ với $\lambda_j \neq \lambda_j$.

Định nghĩa 4.2.2. Định thức Vronski của hệ hàm $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)$

khả vi cấp $n-1$ trên khoảng (a,b) là

$$W[\varphi_1,\cdots,\varphi_n] = W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \dots & \varphi_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Định lý 4.2.1. *Giả sử hệ $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)$ khả vi cấp $n-1$ và phụ thuộc tuyến tính trên $(a;b)$. Khi đó định thức Vronski đồng nhất bằng 0 trên khoảng đó.*

Chứng minh. Theo giả thiết, tồn tại các hằng số $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ không đồng thời bằng 0 sao cho

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \cdots + \alpha_k\varphi_k(x) = 0. \tag{*}$$

Lấy đạo hàm (*) $n-1$ lần thì

$$\begin{cases} \alpha_1 \quad \varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \cdots + \alpha_n\varphi_n(x) = 0 \\ \alpha_1 \quad \varphi_1'(x) + \alpha_2\varphi_2'(x) + \cdots + \alpha_n\varphi_n'(x) = 0 \\ \dots \quad \dots\dots \qquad \dots \\ \alpha_1 \quad \varphi_1^{(n-1)}(x) + \alpha_2\varphi_2^{(n-1)}(x) + \cdots + \alpha_n\varphi_n^{(n-1)}(x) = 0 \end{cases} \tag{**}$$

Khi đó với mỗi $x \in (a;b)$ cố định, hệ phương trình đại số có nghiệm không tầm thường. Do đó định thức của hệ phương trình trên bằng 0. Suy ra định thức Vronski bằng 0. □

Hệ quả 4.2.2. *Nếu hệ hàm $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)$ khác 0 dù chỉ* *một điểm trên khoảng $(a; b)$ thì hệ hàm trên độc lập tuyến tính trên $(a; b)$.*

Nhận xét. Định lý trên cho một điều kiện cần của sự phụ thuộc tuyến tính của hệ hàm, không là điều kiện đủ. Ta xét ví dụ sau

Ví dụ 4.2. Xét hệ hai hàm

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} x^2 & \text{nếu} \quad x \geqslant 0 \\ 0 & \text{nếu} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$

và

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad x \geqslant 0 \\ x^2 & \text{nếu} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$

Kiểm tra được rằng định thức Vronski bằng 0. Tuy nhiên, hệ $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ là độc lập tuyến tính.

Thật vậy, nếu tồn tại α_1, α_2 không đồng thời bằng 0 sao cho

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) = 0, \forall x \in (-\infty, +\infty)$$

thì trên khoảng $(-\infty, 0]$ có $\alpha_2 x^2 = 0$. Điều này là vô lý $\alpha_2 \neq 0$.

Định lý 4.2.3 (Công thức Ostrogratski-Liuvil)**.** *Định thức Vronski của n nghiệm trong phương trình (2.1) được xác định bởi*

$$W(x) = Ce^{-\int p_1(x)dx}$$

trong đó $p_1(x)$ là hệ số của $y^{(n-1)}$.

- Ứng dụng công thức Ostrogratski-Liuvil để tìm nghiệm tổng quát của phương trình cấp hai

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

khi biết 1 nghiệm riêng $y_1(x)$ của phương trình.

- Giả sử $y(x)$ là nghiệm của phương trình. Khi đó

$$\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix} = C_1 e^{-\int p(x)dx}.$$

- Chia hai vế cho $y_1^2(x)$ và tìm được

$$y = y_1\Big(\int \frac{C_1 e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)}dx + C_2\Big).$$

Ví dụ 4.3. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

biết rằng phương trình có một nghiệm riêng là $y_1 = x$.

Hướng dẫn: $p(x) = \dfrac{-x}{1 - x^2}$. Do đó

$$\begin{aligned} y &= x\Big(\int C_1 \frac{e^{\int \frac{2xdx}{1-x^2}}}{x^2} + C_2\Big) \\ &= \Big(C_1 \int \frac{dx}{x^2(1 - x^2)} + C - 2\Big) \\ &= x\Big(C_1(\frac{-1}{x} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}) + C_2\Big) \\ &= C_2 + C_1\Big(\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} - 1\Big). \end{aligned}$$

Đây là nghiệm tổng quát của phương trình.

Ví dụ 4.4. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình

$$(x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

biết rằng $y_1 = x$ là một nghiệm riêng của phương trình.

Hướng dẫn: Sử dụng công thức Ostrogratski-Liuvil. Nghiệm tổng quát là $y = C_1 x + C_2(x^2 - 1)$.

4.3 Phương trình tuyến tính không thuần nhất cấp n

4.3.1 Nghiệm tổng quát

Trong phần này ta xét phương trình không thuần nhất

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = f(x). \qquad (3.1)$$

trong đó các $p_i(x), f(x)$ liên tục trên các khoảng $(a; b)$.

Nếu dùng toán tử vi phân tuyến tính

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = f(x) \qquad (3.1)$$

thì ta có thể xét đến các tính chất sau của phương trình tuyến tính không thuần nhất.

• Nếu $z(x)$ là nghiệm của phương trình tuyến tính thuần nhất và $y(x)$ là nghiệm của (3.1) thì $z(x) + y(x)$ cũng là một nghiệm của (3.1).

• Nếu $y_1(x), y_2(x)$ là các nghiệm riêng của phương trình (3.1) thì

$y_1(x) + y_2(x)$ là nghiệm của phương trình

$$L[y] = f_1(x) + f_2(x).$$

Giả sử $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ là các nghiệm cơ bản của phương trình thuần nhất và $y^*(x)$ là nghiệm của phương trình không thuần nhất. Khi đó biểu thức

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_ny_n(x) + y^*(x)$$

là nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất.

Ví dụ 4.5. Xét phương trình

$$y'' + 2y = 2 + 3.e^x$$

Kiểm tra được rằng phương trình thuần nhất tương ứng có hai nghiệm độc lập tuyến tính là $y_1 = \cos\sqrt{2}x$ và $y_2 = \sin\sqrt{2}x$. Do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$z = C_1\cos\sqrt{2}x + C_2\sin\sqrt{2}x.$$

Phương trình không thuần nhất có một nghiệm riêng là $y^*(x) = 1 + e^x$ nên nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất là

$$y(x) = C_1\cos\sqrt{2}x + C_2\sin\sqrt{2}x + 1 + e^x.$$

4.3.2 Phương pháp biến thiên hằng số Lagrange

- Giả sử phương trình tuyến tính thuần nhất có n nghiệm độc lập tuyến tính là $\{y_i(x)\}_{i=1}^n$. Khi đó ta tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất dưới dạng

$$y^*(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \cdots + C_n(x)y_n(x).$$

- Phương pháp đó được gọi là biến thiên hằng số Lagrange.

Ví dụ 4.6. Xét phương trình $xy'' - y' = x^2$.

Phương trình thuần nhất tương ứng là $xy'' - y' = 0$ có thể viết dưới dạng

$$\frac{y''}{y'} = \frac{1}{x}$$

suy ra $y' = Cx$ do đó $y = \dfrac{C_1x^2}{2} + C_2$.

Ta tìm nghiệm riêng của phương trình dưới dạng

$$y^*(x) = C_2(x)x^2 + C_1(x).$$

Trong đó $C_1(x), C_2(x)$ thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} 1 \;\; C_1'(x) + x^2C_2'(x) = 0 \\ 0 \;\; C_1'(x) + 2xC_2'(x) = x \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta được $C_1'(x) = \dfrac{-x^2}{2}; C_2'(x) = \dfrac{1}{2}$.

Do đó nghiệm riêng là $y^*(x) = \dfrac{-x^3}{6} + \dfrac{x^3}{2} = \dfrac{x^3}{3}$.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = C_1 + C_2x^2 + \frac{x^3}{3}.$$

Ví dụ 4.7. Xét phương trình

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}.$$

Phương trình thuần nhất tương ứng có hai nghiệm cơ bản là $y = \cos x$ và $y = \sin x$.

Ta tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất dưới dạng

$$y^*(x) = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$$

trong đó $C_1(x), C_2(x)$ xác định từ hệ phương trình

$$\begin{cases} C_1'(x) \ \cos x + C_2'(x)\sin x = 0 \\ -C_1'(x) \ \sin x + C_2'(x)\cos x = \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được $C_1(x) = \ln|\cos x|$ và $C_2(x) = x$. Do đó nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + \cos\ln|\cos x| + \sin x$$

với C_1, C_2 là các hằng số bất kỳ.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IV

1. Tìm phương trình tuyến tính thuần nhất nhận các hệ hàm sau đây làm hệ nghiệm cơ bản:

a) $1, x, x^2$.

b) $\cos^2 x, \sin^2 x$.

2. Tính định thức Vronski của phương trình

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0.$$

3. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$$

biết nghiệm riêng của phương trình là $y_1(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

4. Giải phương trình

$$y'' \sin^2 x - 2y = 0$$

biết phương trình có nghiệm riêng là $y = \cot x$.

5. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình

$$y'' + \frac{x}{1-x} y' - \frac{1}{1-x} y = x - 1$$

biết một nghiệm riêng của phương trình tuyến tính thuần nhất là $y = e^x$.

6. Chứng minh rằng nếu $q(x) < 0$ thì nghiệm của phương trình

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

không thể có giá trị cực đại dương.

7. Chứng minh rằng tỉ số của hai nghiệm độc lập tuyến tính bất kỳ của phương trình

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

không thể có điểm cực đại dương.

8. Chứng minh rằng nghiệm của phương trình

$$y'' - x^2 y = 0$$

với điều kiện ban đầu $y(0) = 1, y'(0) = 0$ là hàm chẵn và dương.

9. Tìm khoảng cách giữa hai không điểm liên tiếp của nghiệm tầm thường của phương trình

$$y'' + my = 0 \qquad m > 0.$$

Có bao nhiêu không điểm trong khoảng $[a; b]$?

10. Chứng minh rằng nghiệm bất kỳ của phương trình

$$y'' + xy = 0$$

có ít nhất 15 không điểm trên đoạn [-25;25].

Chương 5

MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP n DẠNG ĐẶC BIỆT

5.1 Phương trình tuyến tính thuần nhất với hệ số hằng

Định nghĩa 5.1.1. Phương trình tuyến tính thuần nhất cấp n với hệ số hằng là phương trình có dạng

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0. \tag{1.1}$$

trong đó $a_1, a_2, \cdots, a_n$ là các hằng số thực.

Nếu dùng toán tử vi phân tuyến tính

$$L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y$$

thì phương trình (1.1) có thể viết dưới dạng

$$L[y] = 0.$$

- Đa thức $F(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n$ được gọi là **đa thức đặc trưng** của phương trình (1.1).

- Nếu λ_0 là nghiệm của đa thức đặc trưng thì $e^{\lambda_0 x}$ là nghiệm của phương trình (1.1).

- Phương trình $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ được gọi là **phương trình đặc trưng** của phương trình (1.1).

5.1.1 Phương trình đặc trưng có n nghiệm thực khác nhau

- Phương trình có n nghiệm thực phân biệt là $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

- Khi đó $y_i = e^{\lambda_i x}$ là các nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình.

- Nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_ne^{\lambda_n x}.$$

Ví dụ 5.1. Giải phương trình $y^{(3)} - y'' - 4y' + 4y = 0$.
Hướng dẫn: Phương trình đặc trưng tương ứng là

$$\lambda^3 - \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0.$$

Nghiệm của phương trình đặc trưng là $\lambda_1 = 1; \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$.
Nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{-2x}.$$

Ví dụ 5.2. Giải phương trình $y^{(3)} - 5y'' + 6y' = 0$.
Hướng dẫn: Phương trình đặc trưng tương ứng là

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 6\lambda = 0.$$

Nghiệm của phương trình đặc trưng là $\lambda_1 = 0; \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$.
Nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}.$$

5.1.2 Phương trình đặc trưng có n nghiệm khác nhau và có nghiệm phức

- Phương trình có n nghiệm phân biệt trong đó có nghiệm phức $\alpha + i\beta$.
- Khi đó với mỗi nghiệm phức ta có hai nghiệm độc lập tuyến tính $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ và $e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ của phương trình.
- Suy ra nghiệm tổng quát của phương trình.

Ví dụ 5.3. Giải phương trình $y^{(3)} - 3y'' + 9y' + 13y = 0$.
Hướng dẫn: Phương trình đặc trưng

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 9\lambda + 13 = 0.$$

Nghiệm của phương trình đặc trưng là $\lambda_1 = -1; \lambda_2 = 2 + 3i; \lambda_3 = 2 - 3i$.
Nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}\cos 3x + C_3 e^{2x}\sin 3x.$$

5.1.3 Phương trình đặc trưng có nghiệm bội

- Phương trình đặc trưng nhận λ là nghiệm bội bậc k.
- Khi đó các nghiệm $xe^{\lambda x}, x^2e^{\lambda x}, \ldots, x^{k-1}e^{\lambda x}$ là các nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình.
- Suy ra nghiệm tổng quát của phương trình.

Ví dụ 5.4. Giải phương trình $y^{(3)} - 3y'' + 3y' - y = 0$.
Hướng dẫn: Phương trình đặc trưng $(\lambda^3 - 1) = 0$ nên $\lambda = 1$ là nghiệm bội ba.
Do đó nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x.$$

Ví dụ 5.5. Giải phương trình $y^{(3)} - 7y'' + 16y' - 12y = 0$.
Hướng dẫn: Phương trình đặc trưng $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 = 0$.
nên phương trình có nghiệm đơn $\lambda = 3$ và nghiệm kép $\lambda = 2$.
Do đó nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{2x} + C_3xe^{2x}.$$

5.1.4 Phương trình tuyến tính không thuần nhất với hệ số hằng

Xét phương trình

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_ny = f(x) \qquad (*)$$

★ Trường hợp $f(x) = P_m e^{\alpha x}$.

• Nếu α không là nghiệm của phương trình đặc trưng thì tìm nghiệm riêng dưới dạng

$$y^*(x) = Q_m(x)e^{\alpha x}.$$

• Nếu α là nghiệm bội k của phương trình đặc trưng thì tìm nghiệm riêng dưới dạng

$$y^*(x) = x^k Q_m(x)e^{\alpha x}.$$

Ví dụ 5.6. Giải phương trình $y'' - 5y' + 6y = 6x^2 - 10x + 2$.
Hướng dẫn: Phương trình đặc trưng

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

có hai nghiệm thực là $\lambda_1 = 2$ và $\lambda_2 = 3$.
Vì $\alpha = 0$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng cho nên tìm nghiệm riêng của phương trình dưới dạng

$$y^*(x) = Ax^2 + Bx + C.$$

Dùng đồng nhất thức xác định được $A = 1; B = C = 0$ nên $y = x^2$ là một nghiệm riêng của phương trình.
Do đó nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + x^2.$$

Ví dụ 5.7. Giải phương trình $y'' - y = (2x + 1)e^{2x}$.

Hướng dẫn: Phương trình đặc trưng

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

có hai nghiệm thực là $\lambda_1 = 1$ và $\lambda_2 = -1$.

Vì $\alpha = 2$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng cho nên tìm nghiệm riêng của phương trình dưới dạng

$$y^*(x) = (Ax + B)e^{2x}.$$

Dùng đồng nhất thức xác định được $A = 2/3; B = -5/9$ nên $y = (\frac{2}{3}x - \frac{5}{9})e^{2x}$ là một nghiệm riêng của phương trình.

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + (\frac{2}{3}x - \frac{5}{9})e^{2x}.$$

Ví dụ 5.8. Giải phương trình $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x}$.

Hướng dẫn: Phương trình đặc trưng

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

có hai nghiệm thực là $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$.

Vì $\alpha = 2$ là nghiệm bội hai của phương trình đặc trưng cho nên tìm nghiệm riêng của phương trình dưới dạng

$$y^*(x) = Ax^2e^{2x}.$$

Dùng đồng nhất thức xác định được $A = 1$ nên $y = x^2e^{2x}$ là một nghiệm riêng của phương trình.

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + x^2 e^{2x}.$$

★ Trường hợp $f(x) = e^{\alpha x}(P_m(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\sin(\beta x))$.

• Nếu $\alpha + i\beta$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng thì tìm nghiệm riêng dưới dạng

$$y^*(x) = e^{\alpha x}(P_m(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\sin(\beta x)).$$

• Nếu $\alpha + i\beta$ là nghiệm bội k của phương trình đặc trưng thì tìm nghiệm riêng dưới dạng

$$y^*(x) = x^k e^{\alpha x}(P_m(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\sin(\beta x)).$$

Ví dụ 5.9. Giải phương trình $y'' + y' - 2y = (\cos x - 7\sin x)e^x$.

Hướng dẫn: Phương trình đặc trưng

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

nên $\lambda_1 = 1; \lambda_2 = 2$.

Vì $\alpha + \beta i = 1 + i$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng cho nên ta tìm nghiệm riêng dưới dạng

$$y^*(x) = e^x(A\cos x + B\sin x).$$

Đồng nhất thức ta được $A = 2; B = 1$ và do đó nghiệm riêng là

$$y^*(x) = e^x(2\cos x + \sin x).$$

Cho nên nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + e^x(2\cos x + \sin x).$$

Ví dụ 5.10. Giải phương trình $y'' + y' + y = -13\sin 2x$.

Hướng dẫn: Phương trình đặc trưng

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

nên $\lambda_1 = \dfrac{-1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i; \lambda_2 = \dfrac{-1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

Vì $\alpha + \beta i = 2i$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng cho nên ta tìm nghiệm riêng dưới dạng

$$y^*(x) = A\cos 2x + B\sin 2x.$$

Đồng nhất thức ta được $A = 2; B = 3$ và do đó nghiệm riêng là

$$y^*(x) = 2\cos 2x + 3\sin 2x).$$

Cho nên nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = C_1 e^{\frac{-x}{2}} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 e^{\frac{-x}{2}} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x + 2\cos 2x + 3\sin 2x).$$

Ví dụ 5.11. Giải phương trình $y'' + y = -2\sin x$.

Hướng dẫn: Phương trình đặc trưng

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

nên $\lambda_1 = i; \lambda_2 = -i$.

Vì $\alpha + \beta i = i$ là nghiệm của phương trình đặc trưng cho nên ta tìm nghiệm riêng dưới dạng

$$y^*(x) = x(A\cos x + B\sin x).$$

Đồng nhất thức ta được $A = -1; B = 0$ và do đó nghiệm riêng là

$$y^*(x) = -x\cos x.$$

Cho nên nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = -x\cos x + C_1\cos x + C_2\sin x.$$

5.2 Phương trình tuyến tính thuần nhất cấp hai $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$.

Trong mục này, ta nghiên cứu về một số tính chất nghiệm của phương trình thuần nhất cấp hai

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{3.1}$$

Nói chung phương trình 3.1 không đơn giản. Thậm chí trong trường hợp đơn giản hơn

$$y'' + q(x)y = 0$$

thì cũng không chắc rằng phương trình có thể giải được. Tuy vậy, ta có thể chuyển về một số trường hợp đơn giản hơn để khảo sát tính chất nghiệm.

5.2.1 Đưa phương trình về dạng không chứa đạo hàm cấp một.

- Đặt $y = \alpha(x)z$ với $\alpha(x)$ xác định bởi

$$\alpha(x) = e^{-\int \frac{p(x)dx}{2}}.$$

• Phương trình được chuyển về dạng $z'' + I(x)z = 0$ với

$$I(x) = \frac{-p(x)}{2} - \frac{p^2(x)}{4} + q(x).$$

Ví dụ 5.12. Xét phương trình Becxel $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$.
Hướng dẫn: $p(x) = \dfrac{1}{x}$ và $q(x) = 1 - \dfrac{n^2}{x^2}$.
Do đó

$$I(x) = 1 + \frac{\frac{1}{4} - n^2}{x^2}.$$

Từ đay suy ra được nếu $n \neq \dfrac{\pm 1}{2}$ thì phép thế

$$y = e^{-\int \frac{dx}{2x}} z = \frac{z}{\sqrt{x}}$$

chuyển phương trình Becxel thành

$$z'' + z = 0.$$

Tìm nghiệm tổng quát của phương trình này và chuyển về biến y ta được nghiệm tổng quát của phương trình Becxel là

$$y = C_1 J_{1/2}(x) + C_2 J_{-1/2}(x).$$

Trong đó $J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ và $J_{\frac{-1}{2}}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$

5.2.2 Phương trình tuyến tính thuần nhất cấp hai tự liên hợp

Định nghĩa 5.2.1. Phương trình tự liên hợp cấp hai là phương trình có dạng

$$p(x)y'' + p'(x)y' + q(x)y = 0.$$

Định lý 5.2.1. *Phương trình tuyến tính thuần nhất cấp hai*

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

có thể đưa về dạng tự liên hợp bằng cách nhân hai vế cho hàm $\mu(x)$ với

$$\mu(x) = \frac{1}{p_0(x)} e^{\displaystyle\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)} dx}.$$

Ví dụ 5.13. Phương trình Lerander

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

là phương trình tự liên hợp.

Thật vậy, với $x \neq \pm 1$ phương trình có

$$(1 - x^2)' = -2x.$$

Do đó phương trình có thể viết lại thành

$$\frac{d}{dx}((1 - x^2)y') + n(n+1)y = 0.$$

Ví dụ 5.14. Phương trình Becxel

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$$

không là phương trình tự liên hợp. Có thể chuyển về phương trình tự liên hợp bằng cách nhân cho $\mu(x) = \dfrac{1}{x}$. Ki đó dạng tự liên hợp của phương trình Becxel là

$$xy'' + y' + (x - \frac{n^2}{x})y = 0.$$

5.3 Sự giao động của nghiệm phương trình tuyến tính cấp hai

Định nghĩa 5.3.1. Nghiệm của phương trình tuyến tính cấp hai được gọi là dao động nếu có ít nhất hai không điểm trên đoạn $(a;b)$. Ngược lại, ta nói nghiệm không dao động.

Ví dụ 5.15. a) Xét phương trình $y'' - \lambda^2 y = 0$ nhận $y = C_1x + C_2$ là nghiệm không dao động với $C_1 \neq 0$.
b) Xét phương trình $y'' + \lambda^2 y = 0$ nhận $y = A\sin(\lambda x + \varphi)$ là nghiệm dao động trên mỗi đoạn $(a;b)$ có độ dài lớn hơn $\dfrac{2\pi}{\lambda}$.

Định lý 5.3.1. *Giả sử hàm $Q(x)$ liên tục trên khoảng $(a;b)$ và thỏa mãn điều kiện*

$$Q(x) \leqslant 0, \forall x \in (a;b)$$

Khi đó nghiệm không tầm thường cửa phương trình $y''+Q(x)y = 0$ không giao động trên khoảng $(a;b)$.

Chứng minh. Giả sử phản chứng rằng tồn tại nghiệm không tầm thường của phương trình là $y_1(x)$ dao động trên $(a;b)$ với hai không điểm liên tiếp là x_1 và x_2.
Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử rằng $y_1(x) > 0$ trên $(x_1.x_2)$. Khi đó trên (x_1, x_2) thì

$$y_1''(x) = -Q(x)y_1(x) \geqslant 0$$

cho nên $y_1'(x)$ là hàm không giảm trên (x_1, x_2). Từ đó suy ra

$$y_1'(x_1) = \lim_{x \to x_1^+} \frac{y_1(x) - y_1(x_1)}{x - x_1} = \lim_{x \to x_1^+} \frac{y_1(x)}{x - x_1} \geqslant 0.$$

Do $y_1(x)$ là nhiệm không tầm thường cho nên $y_1'(x_1) > 0$.

Từ đây suy ra $y_1'(x) > 0$ với mọi $x \in (x_1; x_2)$. Mặt khác, theo định lý Rolle thì tồn tại $c \in (x_1, x_2)$ sao cho $y_1'(c) = 0$. Điều này là mâu thuẫn với nhận xét $y_1'(x) > 0$. □

Định lý 5.3.2 (stoke)**.** *Giả sử $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là hai nghiệm độc lập tuyến tính bất kỳ của phương trình*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

Khi đó giữa hai không điểm của nghiệm $y_1(x)$ có duy nhất một không điểm của nghiệm $y_2(x)$ và ngược lại.

Định lý 5.3.3 (so sánh)**.** *Cho hai phương trình $y'' + Q_1(x)y = 0$ và $z'' + Q_2(x)y = 0$ trong đó Q_1, Q_2 là các hàm liên tục trên $(a; b)$. Giả sử trên đoạn $(a; b)$ các hàm $Q_1(x)$ và $Q_2(x)$ thỏa mãn điều kiện*

$$Q_2(x) \geqslant Q_1(x).$$

Khi đó giữa hai không điểm liên tiếp của nghiệm không tầm thường của phương trình thứ nhất có ít nhất một không điểm của nghiệm không tầm thường của phương trình thứ hai nếu trong khoảng nằm giữa hai không điểm này có điểm x mà tại đó $Q_2(x) > Q_1(x)$.

Hệ quả 5.3.4. *Nếu $Q_2(x) > Q_1(x)$ trong khoảng $(a; b)$ thì nghiệm của phương trình $z'' + Q_2(x)y = 0$ dao động hơn nghiệm của phương trình $y'' + Q_1(x)y = 0$.*

Ví dụ 5.16. Xét phương trình

$$y'' + q(x)y = 0$$

trong đó $q(x)$ là hàm dương liên tục trên đoạn $[a; b]$. Kí hiệu $m = \min q(x)$ và $M = \max q(x)$ trên $[a; b]$. Áp dụng định lý so sánh cho từng cặp các phương trình

$$y'' + my = 0; \qquad z'' + q(x)z = 0$$

$$y'' + q(x)y = 0; \qquad z'' + Mz = 0$$

Kiểm tra được rằng khoảng cách giữa hai không điểm liên tiếp của nghiệm không tầm thường của phương trình $y'' + k^2y = 0$ là $\frac{\pi}{k}$. Do đó " khoảng cách giữa hai không điểm liên tiếp của nghiệm không tầm thường của phương trình $y'' + q(x)y = 0$ nằm trong khoảng $(\frac{\pi}{\sqrt{M}}; \frac{\pi}{\sqrt{m}})$."

Ví dụ 5.17. Xét phương trình Becxel

$$x^2y'' + xy'(x^2 - n^2)y = 0.$$

Phương trình được chuyển về

$$z'' + \big(1 - \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\big)z = 0.$$

So sánh với phương trình

$$y'' + y = 0$$

thì có được kết luận " khoảng cách giữa hai không điểm liên tiếp của hàm Becxel nhỏ hơn π nếu $\frac{-1}{2} < n < \frac{1}{2}$, lớn hơn π nếu $n > 1/2$ hoặc $n < -1/2$."

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG V

1. Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình thuần nhất sau đây:

a. $y^{(3)} - 3y' = 0$.

b. $y^{(3)} - 3y'' + 3y' - y = 0$.

c. $y^{(4)} - 4y^{(3)} + 5y'' - 4y' + 4y = 0$.

2. Giải các phương trình tuyến tính không thuần nhất sau:

a. $y'' - 4y' + y = x^2 + 2x$.

b. $y^{(3)} + y'' + y' + y = xe^x$.

c. $y^{(3)} + y'' + y' + y = 3\sin x$.

d. $y'' + 4y = x\sin 2x$.

e. $y'' + 9y = \cos 2x.\cos 3x$.

f. $y^{(3)} + y = \dfrac{x^3 - 6}{x^4}$.

3. Bằng phép đổi biến chuyển các phương trình sau đây về phương trình có hệ số hằng và giải phương trình đó

a. $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$.

b. $(1 - x^2)y'' - xy' = 2y = 0$.

c. $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0.$

d. $y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{x^2}{(1+x^2)^2}y = 0.$

4. Chứng minh rằng nếu $q(x) \leqslant 0$ thì bài toán biên

$$y'' + q(x)y = 0; y(x_1) = a; y(x_2) = b$$

có nghiệm duy nhất. Hơn nữa, nghiệm này là hàm đơn điệu khi $b = 0$.

5. Cho phương trình

$$y'' + ay' + by = 0$$

tìm điều kiện của các hằng số $a; b$ sao cho

a) mọi nghiệm của phương trình đều giới nội trong $[0, +\infty)$.

b) mọi nghiệm của phương trình đều dần đến 0 khi $x \to +\infty$.

6. Chứng minh rằng nghiệm $y(x)$ của phương trình

$$y'' + \lambda^2 y = f(x)$$

với điều kiện ban đầu $y(0) = y'(0) = 0$ có dạng

$$y(x) = \frac{1}{\lambda}\int_0^x \sin\lambda(x-\tau)f(\tau)d\tau.$$

Chương 6

HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

6.1 Các khái niệm mở đầu

6.1.1 Hệ phương trình- nghiệm của hệ phương trình

Định nghĩa 6.1.1. Hệ phương trình vi phân cấp một dạng chuẩn tắc là hệ phương trình có dạng sau

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = & f_1(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = & f_2(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = & f_n(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) \end{cases} \tag{1.1}$$

Định nghĩa 6.1.2 (nghiệm của hệ)**.** Nghiệm của hệ phương trình vi phân là hệ hàm $\{y_i = \varphi_i(x)\}_{i=1}^{n}$ nếu thay vào (1.1) thì được đồng nhất thức theo x.

Định nghĩa 6.1.3. Tập hợp điểm

$$\Gamma = \{(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)), x \in (a; b)\}$$

được gọi là **đường cong tích phân** ứng với nghiệm $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)$.

Định nghĩa 6.1.4. Không gian $\mathbb{R}^n$ được gọi là **không gian pha**.

Tập hợp điểm

$$\gamma = \{(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)), x \in (a; b)\}$$

được gọi là **đường cong pha** hay **quỹ đạo pha**.

- Đường cong pha chứa trong không gian pha.
- Không gian $\mathbb{R}^{n+1}$ được gọi là không gian pha suy rộng.
- Đường cong tích phân được chứa trong không gian pha suy rộng.

6.1.2 Ý nghĩa cơ học

- Xem t là biến độc lập, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ là tọa độ của một điểm trong không gian pha $\mathbb{R}^n$.
- Hệ phương trình vi phân cấp một

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dx} = & F_1(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \dfrac{dx_2}{dx} = & F_2(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dx_n}{dx} = & F_n(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{cases} \tag{1.2}$$

- Hệ phương trình trên là hệ phương trình chuyển động của một điểm trong không gian pha $\mathbb{R}^n$.

- Hệ (1.2) độc lập với biến t hay

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dx} = & F_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \dfrac{dx_2}{dx} = & F_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dx_n}{dx} = & F_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{cases} \tag{1.3}$$

  thì vận tốc của vector không thay đổi theo thời gian.

- Hệ phương trình trên xác định một trường vận tốc dừng hay còn gọi là **hệ ô-tô-nôm**.

Ví dụ 6.1. Hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} & = y \\ \dfrac{dy}{dt} & = -x \end{cases}$$

là một hệ dừng.

- Không gian pha là $\mathbb{R}^2$.

- Hệ có nghiệm là $x = C_1 \cos(t - C_2); y = -C_1 \sin(t - C_2)$.

- Vì $x^2 + y^2 = C_1^2$ nên trong không gian pha mỗi chuyển động của hệ đang xét là một đường tròn tâm O bán kính $|C_1|$.

6.2 Mối quan hệ giữa phương trình vi phân cấp n và hệ n phương trình vi phân cấp một

6.2.1 Chuyển PTVP cấp n về hệ n phương trình vi phân cấp một

- Đặt $y = y_1; y' = y_2, \cdots, y_n = y^{(n-1)}$.
- Khi đó có hệ n phương trình vi phân cấp một

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = & y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = & y_3 \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = & f(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) \end{cases}$$

6.2.2 Chuyển hệ n phương trình vi phân cấp một về PTVP cấp n

Ví dụ 6.2. Xét hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = & 3x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = & 2x - y \end{cases}$$

- Vi phân hai vế của phương trình đầu thì $\dfrac{d^2x}{dt^2} = 3\dfrac{dx}{dt} - 2\dfrac{dy}{dt}$.
- Thay phương trình hai vào thì

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + x = 0.$$

Ví dụ 6.3. Xét hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = & y \\ \dfrac{dy}{dt} = & x \end{cases}$$

- Cộng hai vế của phương trình thì $\dfrac{d}{dt}(x+y) = x+y$.
- Suy ra $x + y = C_1 e^t$.
- Trừ hai phương trình cho nhau thì $\dfrac{d}{dt}(x-y) = -x+y$.
- Suy ra $x - y = C_2 e^{-t}$.

6.3 Định lý tồn tại và duy nhất nghiệm

Định lý 6.3.1. *Xét hệ phương trình vi phân*

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = & f_1(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = & f_2(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = & f_n(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) \end{cases} \tag{4.1}$$

Nếu các hàm f_i liên tục và giới nội trong miền $G \subset \mathbb{R}^n$ và các hàm f_i thỏa mãn điều kiện Lipchitz. Khi đó hệ phương trình có nghiệm duy nhất thỏa mãn điều kiện Cauchy ban đầu.

6.4 Các loại nghiệm của hệ phương trình vi phân

Nghiệm tổng quát- nghiệm riêng- nghiệm kỳ dị

Định nghĩa 6.4.1. Hệ n hàm khả vi liên tục theo x phụ thuộc vào n hằng số $y_i = \varphi_i(x, C_1, C_2, \cdots, C_n)$ được gọi là nghiệm tổng quát của hệ phương trình nếu

a) Với mỗi $(x_0, y_1^0, \cdots, y_n^0) \in G$ có thể xác định được các hằng số C_i.

b) Khi thay y_i vào hệ phương trình ta được các đồng nhất thức đúng.

Định nghĩa 6.4.2. Nghiệm của hệ phương trình mà tại mỗi điểm của nó tính duy nhất nghiệm của bài toán Cauchy được đảm bảo gọi là **nghiệm riêng**.

Nếu tính duy nhất nghiệm bị phá vỡ được gọi là **nghiệm kỳ dị**.

6.5 Hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất

Định nghĩa 6.5.1. Hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất là hệ phương trình có dạng

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = & p_{11}(x)y_1 + p_{12}(x)y_2 + \cdots + p_{1n}(x)y_n \\ \dfrac{dy_2}{dx} = & p_{21}(x)y_1 + p_{22}(x)y_2 + \cdots + p_{2n}(x)y_n \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = & p_{n1}(x)y_1 + p_{n2}(x)y_2 + \cdots + p_{nn}(x)y_n \end{cases} \tag{6.1}$$

Trong đó các hàm $p_{ij}(x)$ liên tục trên $(a; b)$.

Cấu trúc nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Định lý 6.5.1. *Giả sử $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ là nghiệm cơ bản của (6.1). Khi đó nghiệm tổng quát của hệ phương trình là*

$$Y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x)$$

trong đó các số c_i là tùy ý.

6.6 Hệ phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất

Định nghĩa 6.6.1. Hệ phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất là hệ phương trình có dạng

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = & p_{11}(x)y_1 + p_{12}(x)y_2 + \cdots + p_{1n}(x)y_n + f_1(x) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = & p_{21}(x)y_1 + p_{22}(x)y_2 + \cdots + p_{2n}(x)y_n + f_2(x) \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = & p_{n1}(x)y_1 + p_{n2}(x)y_2 + \cdots + p_{nn}(x)y_n + f_n(x) \end{cases} \tag{7.1}$$

Trong đó các hàm $p_{ij}(x)$ liên tục trên $(a; b)$.

Cấu trúc nghiệm của hệ phương trình tuyến tính không thuần nhất

Định lý 6.6.1. *Giả sử $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ là nghiệm cơ bản của (6.1) và $y^*(x)$ là nghiệm của hệ phương trình tuyến tính không thuần nhất. Khi đó nghiệm tổng quát của hệ phương trình (7.1) là*

$$Y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x) + y^*(x)$$

trong đó các số c_i là tùy ý.

6.7 Một số phương pháp giải hệ phương trình vi phân

6.7.1 Phương pháp khử

Nội dung phương pháp: là đưa một hệ phương trình vi phân về phương trình vi phân cấp cao bằng cách đạo hàm một phương trình rồi khử các hàm chưa biết chỉ để lại một hàm số duy nhất.

Ví dụ 6.4. Xét hệ

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = & \dfrac{y}{t^2} \\ \dfrac{dy}{dt} = & 3x + \dfrac{3}{t} \end{cases}$$

Từ phương trình đầu ta có

$$y = t^2\frac{dx}{dt} \to \frac{dy}{dt} = 2t\frac{dx}{dt} + t^2\frac{d^2y}{dt^2}.$$

Từ phương trình hai ta có

$$\frac{dx}{dt} = 3x + \frac{3}{t}y = 3x + 3t\frac{dx}{dt}.$$

Cho nên

$$t^2\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} = 3x + 3t\frac{dx}{dt}$$

suy ra

$$t^2\frac{d^2x}{dt^2} - t\frac{dx}{dt} - 3x = 0.$$

Giải phương trình vi phân cấp hai ta được $x(t) = \dfrac{c_1}{t} + c_2t^3$ cho nên $y = t^2\dfrac{dx}{dt} = -c_1 + 3c_2t^2$. Cho nên nghiệm của hệ là

$$\begin{cases} x(t) = & \dfrac{c_1}{t} + c_2t^3 \\ y(t) = & t^2\dfrac{dx}{dt} = -c_1 + 3c_2t^2 \end{cases}$$

Ví dụ 6.5. Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= \quad 2y \\ \dfrac{dy}{dt} &= \quad 2z \\ \dfrac{dz}{dt} &= \quad 2x \end{cases}$$

Đạo hàm phương trình thứ nhất ta được

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\frac{dy}{dt}$$

thế $\dfrac{dy}{dt}$ vào phương trình thứ hai ta được $\dfrac{d^2x}{dt^2} = 4z$.
Đạo hàm tiếp ta được

$$\frac{d^3x}{dt^3} = 4\frac{dz}{dt}.$$

Thế $\dfrac{dz}{dt}$ vào phương trình thứ ba ta được

$$\frac{d^3x}{dt^3} - 8x = 0.$$

Ta được một phương trình vi phân cấp ba theo x. Giải phương trình theo x và thay vào các phương trình thứ nhất, thứ hai trong hệ ta được nghiệm của hệ là

$$\begin{cases} x = & c_1e^{2t} + e^{-t}(c_2\cos\sqrt{3}t + c_3\sin\sqrt{3}t) \\ y = & c_1e^{2t} + \dfrac{1}{2}e^{-t}((c_3 + c_2)\cos\sqrt{3}t - (c_3\sqrt{3} + c_3)\sin\sqrt{3}t) \\ z = & c_1e^{2t} - \dfrac{1}{2}e^{-t}((c_3\sqrt{3} + c_2)\cos\sqrt{3}t - (c_3\sqrt{3} + c_3)\sin\sqrt{3}t) \end{cases}$$

6.7.2 Phương pháp toán tử

Nội dung: Trường hợp hệ phương trình vi phân tuyến tính với hệ số hằng thì phương pháp khử nêu trên có thể tiến hành nhờ các toán tử vi phân và việc giải các hệ phương trình vi phân giống như giải các phương trình đại số tuyến tính.
Ta kí hiệu phép lấy đạo hàm là $D = \dfrac{d}{dt}$ khi đó

$$D^2 = \frac{d^2}{dt^2}, \ldots, D^k = \frac{d^k}{dt^k}.$$

Khi đó các hệ phương trình vi phân có thể biểu diễn như hệ phương trình đại số. Ví dụ 6.6. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x'' + x' + 2y = & 0 \\ x' - 3x - 2y = & 0 \end{cases}$$

Viết hệ dưới dạng toán tử như sau

$$\begin{cases} Dx + (D+2)y = & 0 \\ (D-3)x - 2y = & 0 \end{cases}$$

Khử x ta được $(D^2 + D - 6)y = 0$. Đây là hệ phương trình vi phân tuyến tính câp hai

$$y'' + y' - 6y = 0.$$

Giải phương trình ta được $y(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{-3t}$.
Thế y vào phương trình đầu ta có được $x' - 3x = 2c_1e^{2t} + 2c_2e^{-3t}$.

Giải phương trình tuyến tính ta tìm được

$$x = -2c_1e^{2t} - \frac{1}{3}c_2e^{-3t}.$$

Ví dụ 6.7. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x''(t) + y'(t) - x(t) + y(t) = & -1 \\ x'(t) + y'(t) - x(t) = & t^2 \end{cases}$$

Viết hệ dưới dạng toán tử như sau

$$\begin{cases} (D^2 - 1)x + (D+1)y = & -1 \\ (D-1)x + Dy = & t^2 \end{cases}$$

Khử y ta được

$$x^{(3)}(t) - x''(t) - x'(t) + x(t) = -2t - t^2.$$

Giải phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất ta được

$$x(t) = -t^2 - 4t - 6 + c_1e^t + c_2te^t + c_3e^{-t}.$$

Thay vào phương trình hai ta được nghiệm của hệ phương trình là

$$\begin{cases} x(t) = & -t^2 - 4t - 6 + c_1e^t + c_2te^t + c_3e^{-t} \\ y(t) = & -t^2 - 2t - 3 - c_2e^t - 2c_3e^{-t} \end{cases}$$

6.7.3 Phương pháp tổ hợp tích phân

Nội dung: là tổ hợp các phương trình một cách thích hợp để được các phương trình dễ lấy tích phân. Ví dụ 6.8. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = & x^2y \\ \dfrac{dy}{dt} = & \dfrac{y}{t} - xy^2 \end{cases}$$

Nhân phương trình thứ nhất với y, phương trình thứ hai với x rồi cộng lại ta được

$$y\frac{dx}{dt} + x\frac{dy}{dt} = \frac{xy}{t} \rightarrow \frac{d(xy)}{dt} = \frac{xy}{t} \rightarrow xy = c_1t.$$

Thế $xy = c_1t$ vào phương trình thứ nhất ta được

$$\frac{dx}{dt} = c_1tx \rightarrow x = c_2e^{c_1\frac{t^2}{2}}.$$

Thế vào phương trình ta được

$$y = \frac{c_1}{c_2}te^{-c_1\frac{t^2}{2}}, \qquad c_2 \neq 0.$$

Vậy nghiệm của hệ là

$$\begin{cases} x = & c_2e^{c_1\frac{t^2}{2}} \\ y = & \dfrac{c_1}{c_2}te^{-c_1\frac{t^2}{2}} \end{cases}$$

Ví dụ 6.9. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = & \dfrac{x}{2x+3y} \\ \dfrac{dy}{dt} = & \dfrac{y}{2x+3y} \end{cases}$$

với điều kiện $x(0) = 1; y(0) = 2$.

Chia phương trình thứ nhất cho phương trình thứ hai ta được

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} \to x = c_1 y.$$

Ta lập tổ hợp thứ hai như sau

$$2\frac{dx}{dt} + 3\frac{dy}{dt} = 1 \to 2dx + 3dy = dt \to 2x + 3y = t + c_2.$$

Từ trên ta được

$$\begin{cases} x = & \dfrac{c_1(t + c_2)}{2c_1 + 3} \\ y = & \dfrac{t + c_2}{2c_1 + 3} \end{cases}$$

Sử dụng điều kiện ban đầu ta được $c_1 = \dfrac{1}{2}, c_2 = 8$ nên nghiệm của hệ là

$$\begin{cases} x = & \dfrac{1}{8}t + 1 \\ y = & \dfrac{1}{4}t + 2 \end{cases}$$

BÀI TẬP CHƯƠNG 6

Bài 1:Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = & x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = & x - y \end{cases}$$

Bài 2:Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = & \dfrac{x}{2x + 3y} \\ \dfrac{dy}{dt} = & \dfrac{y}{2x + 3y} \end{cases}$$

Bài 3:Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = & \dfrac{z}{(z-y)^2} \\ \dfrac{dz}{dx} = & \dfrac{y}{(z-y)^2} \end{cases}$$

Bài 4:Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = & \dfrac{x-y}{z-t} \\ \dfrac{dy}{dt} = & \dfrac{x-y}{z-t} \\ \dfrac{dz}{dt} = & x-y+1 \end{cases}$$

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Thế Hoàn- Phạm Phu ,(2007), *Cơ sở phương trình vi phân và lý thuyết ổn định*, NXB Giáo dục.

[2] Nguyễn Thế Hoàn- Trần Văn Nhung ,(2007),*Bài tập Phương trình vi phân*, NXB Giáo dục.

[3] Đỗ Công Khanh ,(2000),*Giải tích nhiều biến*, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên Thành phố Hồ Chí Minh.

[4] Đỗ Công Khanh- Ngô Thu Lương- Nguyễn Minh Hằng,(2003),*Toán cao cấp (Toán 4), Chuỗi và Phương trình vi phân*, NXB Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh.

[5] Nguyễn Đình Phư ,(2002) ,*Bài tập phương trình vi phân*, Đại học Quốc Gia Thành phố Hồ Chí Minh.